

二维 Fisher-KPP 方程的一组显式单调的有限差分法*

张佳豪, 邓定文

(南昌航空大学 数学与信息科学学院, 南昌 330063)

摘要: 运用一类加权的差分公式和显式 Euler 法离散扩散项及一阶时间导数项, 从而对二维 Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (Fisher-KPP) 方程构造一组两层、显式、单调的差分格式. 经分析, 证明了当网格步长和参数 α, ρ, θ 满足一定约束条件时, 该格式能够保持原问题解的保正性、有界性和单调性等数学性质, 并且获得了数值解在无穷范数下的误差估计. 数值实验验证了数值结果与理论结果相吻合.

关键词: Fisher-KPP 方程; 保正性; 有界性; 单调性; 有限差分法

中图分类号: O357.41 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450288

A Class of Explicit and Monotonic Finite Difference Methods for 2D Fisher-KPP Equations

ZHANG Jiahao, DENG Dingwen

(College of Mathematics and Information Science,
Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, P.R.China)

Abstract: With a class of weighted difference formulas and explicit Euler methods to discretize diffusion terms and the 1st-order temporal derivative, respectively, a new type of 2-level, explicit and monotonic finite difference methods is established for 2D Fisher-KPP equations. As α, ρ, θ and the grid step size satisfy some constraining conditions, their numerical solutions can inherit the properties of the exact solutions, such as positivity preservation, boundedness and monotonicity. Furthermore, the maximum norm error estimate is obtained, rigorously. Numerical experiments illustrate that the numerical results agree well with the theoretical findings.

Key words: Fisher-KPP equation; positivity preservation; boundedness; monotonicity; finite difference method

0 引言

本文考虑如下非线性 Fisher-KPP 方程的初边值问题:

* 收稿日期: 2024-10-28; 修订日期: 2025-02-26

基金项目: 国家自然科学基金(12461070); 江西省自然科学基金重点项目(20242BAB26005); 江西省杰出青年基金(20212ACB211006)

作者简介: 张佳豪(2000—), 男, 硕士生(E-mail: 910342047@qq.com);

邓定文(1981—), 男, 教授, 博士(通信作者. E-mail: dengdingwen2010@163.com).

引用格式: 张佳豪, 邓定文. 二维 Fisher-KPP 方程的一组显式单调的有限差分法[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(4): 505-515.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + bu(1 - u^p), \quad (x, y) \in \Omega, 0 < t \leq T, \quad (1a)$$

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega}, \quad (1b)$$

$$u(a_1, y, t) = \alpha_1(y, t), u(b_1, y, t) = \beta_1(y, t), \quad y \in [c_1, d_1], t \in (0, T], \quad (1c)$$

$$u(x, c_1, t) = \alpha_2(x, t), u(x, d_1, t) = \beta_2(x, t), \quad x \in [a_1, b_1], t \in (0, T], \quad (1d)$$

其中 α 和 b 均为非负常数, 且分别对应扩散项系数和反应项系数, $\bar{\Omega} = [a_1, b_1] \times [c_1, d_1]$, Ω 表示求解区域的内部, Γ 是求解区域的边界, 即 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

1937年, Fisher^[1]提出了 Fisher 方程. 该方程是描述某一种群扩散的数学模型, 反映种群密度的变化. 同年, Kolmogorov 等^[2]也独立地提出和研究该方程. 因此, 该方程也称为 Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov (Fisher-KPP) 方程. 如今, Fisher-KPP 方程的研究成果已经应用于各种科学和工程领域^[1-13], 如群体遗传学的扩散现象、化学反应等.

人们在 Fisher-KPP 方程的真解及其相关数学理论方面取得了许多成果. 例如, Wang 在文献[4]中给出了一维 Fisher-KPP 方程(见式(1a))在 $\alpha = b = 1$ 时的解析解

$$u(x, t) = \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left[- \frac{p}{2\sqrt{2p+4}} \left(x - \frac{p+4}{\sqrt{2p+4}} t \right) + c \right] + \frac{1}{2} \right\}^{2/p}. \quad (2)$$

文献[5]研究了二维 Fisher 方程的行波解. 对更多的理论成果见专著[6].

保结构数值方法能够保持连续问题精确解的一个或多个性质, 不仅能够获得有物理意义的数值解, 还适用于长时间的数值模拟, 因此一直是微分方程数值解法研究的热点课题^[7-9]. 众所周知, Fisher-KPP 方程的解满足最大值原理: 当初值和边值均大于或等于零小于或等于 1 时, Fisher-KPP 方程的解落在 $[0, 1]$ 内(见引理 1). 近年来, 对 Fisher-KPP 方程设计保正或者保最大值原理的数值方法受到了广泛关注. 例如, 文献[10]给出了 Fisher-KPP 方程保最大值的显式差分法和隐式差分法. 在 2012 年, Macías-Díaz 和 Puri^[11]对 Fisher-KPP 方程建立了显式保正有限差分法. 2014 年, Macías-Díaz 和 Rejniak^[12]对 Fisher-KPP 方程设计了一类两层的非线性有限差分法. 该方法在时间和空间方向上分别有一阶和二阶精度, 且它的数值解具有保正性和满足最大值原理.

在本文中, 运用一类加权的差分公式和显式 Euler 法离散扩散项和线性项, 对二维 Fisher-KPP 方程(1a)–(1d)设计了一组保正、保界且显式的单调有限差分法. 同时, 证明了新格式的数值解满足离散的最大值原理. 运用离散最大值原理, 给出了数值解的收敛性. 最后, 数值结果验证了新算法的数值解满足离散的最大值原理和数值解的收敛性.

本文的结构如下: 第 1 节给出一些记号和引理, 第 2 节研究差分格式的建立, 第 3 节讨论差分格式的性质, 第 4 节是数值实验, 第 5 节对本研究作出总结.

1 一些记号和引理

取空间步长 $h_x = (b_1 - a_1)/M_1$, $h_y = (d_1 - c_1)/M_2$ 和时间步长 $\tau = T/N$. 这里 M_1, M_2, N 为正整数. 记 $t_k = k\tau$, $k = 0, 1, \dots, N$; $x_i = a_1 + ih_x$, $i = 0, 1, \dots, M_1$; $y_j = c_1 + jh_y$, $j = 0, 1, \dots, M_2$, 从而节点 (x_i, y_j, t_k) 构成了区域 $\bar{\Omega}$ 的一个剖分. 引入记号如下:

$$\bar{\Omega}_{ht} = \{(x_i, y_j, t_k) \mid 0 \leq i \leq M_1, 0 \leq j \leq M_2, 0 \leq k \leq N, i, j, k \in \mathbf{N}\},$$

$$\bar{\Omega}_h = \{(i, j) \mid 0 \leq i \leq M_1, 0 \leq j \leq M_2\}, \quad \Omega_h = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq M_1 - 1, 1 \leq j \leq M_2 - 1\},$$

$$\bar{\Omega}_\tau = \{k \mid 0 \leq k \leq N\}, \quad \Omega_\tau = \{k \mid 0 \leq k \leq N - 1\}, \quad \tilde{\Omega}_\tau = \{k \mid 1 \leq k \leq N\},$$

$$\Gamma = \{(0, j), (M_x, j) \mid 0 \leq j \leq M_y\} \cup \{(i, 0), (i, M_y) \mid 0 \leq i \leq M_x\}.$$

定义网格函数空间 $V_h = \{V \mid V = \{V_{i,j}^k \mid (i, j) \in \bar{\Omega}_h, k \in \bar{\Omega}_\tau\}\}$, 设 $U \in V_h$, 引入如下记号:

$$\delta_x^2 U_{i,j}^k = \frac{1}{h_x^2} (U_{i-1,j}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i+1,j}^k), \quad \delta_y^2 U_{i,j}^k = \frac{1}{h_y^2} (U_{i,j-1}^k - 2U_{i,j}^k + U_{i,j+1}^k), \quad \delta_t U_{i,j}^{k+1/2} = \frac{1}{\tau} (U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k),$$

$$\|U^k\|_\infty = \max_{(i,j) \in \bar{\Omega}_h, k \in \bar{\Omega}_\tau} |U_{i,j}^k|, \quad \|U^k\| = \sqrt{h_x h_y \sum_{i=1}^{M_1-1} \sum_{j=1}^{M_2-1} (U_{i,j}^k)^2}.$$

引理 1^[4-6] 令 $u(x, y, t)$ 是初边值问题(1a)–(1d)的解.若初边值条件满足 $0 \leq \varphi(x, y); \alpha_1(y, 0), \alpha_2(x, t), \beta_1(y, 0), \beta_2(x, t) \leq 1$, 则方程(1a)–(1d)的解满足

$$0 \leq u(x, y, t) \leq 1, \quad (x, y, t) \in \bar{\Omega} \times [0, T]. \tag{3}$$

引理 2^[13] (Gronwall 不等式) 若 $\{F^k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ 为非负序列,且满足

$$F^{k+1} \leq (1 + c\tau)F^k + \tau g, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $c, g \geq 0$ 是常数,则有 $F^k \leq e^{ck\tau}(F^0 + g/c), k = 0, 1, 2, \dots$.

2 差分格式的建立

定义 $u_{i,j}^k, U_{i,j}^k$ 分别表示方程(1a)–(1d)在结点 (x_i, y_j, t_k) 处的精确解和数值解. $C_l (l \in \mathbf{N}^+)$ 表示一些不依赖网格参数的常数,在不同情形下取不同值.

在结点 (x_i, y_j, t_k) 处考虑式(1a)有

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, t_k) = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j, t_k) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j, t_k) \right) + bu(x_i, y_j, t_k) - b[u(x_i, y_j, t_k)]^{p+1}. \tag{4}$$

对式(4)分别使用显式 Euler 法和二阶中心差商离散时间和空间导数,并应用 $[u(x_i, y_j, t_k)]^{p+1} \approx [u(x_i, y_j, t_k)]^p u(x_i, y_j, t_{k+1})$ 离散非线性项,应用 $u_{i,j}^k \approx \theta u_{i,j}^{k+1} + (1 - \theta) u_{i,j}^k$ 并注意初边值条件(1b)–(1d)可得

$$\begin{aligned} \delta_i u_{i,j}^{k+1/2} = & \alpha \left(\frac{u_{i+1,j}^k - 2[\theta u_{i,j}^{k+1} + (1 - \theta) u_{i,j}^k] + u_{i-1,j}^k}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2[\theta u_{i,j}^{k+1} + (1 - \theta) u_{i,j}^k] + u_{i,j-1}^k}{h_y^2} \right) + \\ & bu_{i,j}^k - bu_{i,j}^{k+1}(u_{i,j}^k)^p + R_{i,j}^k, \quad (i, j) \in \Omega_h, k \in \Omega_\tau, \end{aligned} \tag{5a}$$

$$u_{i,j}^0 = \varphi(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \bar{\Omega}_h, \tag{5b}$$

$$u_{0,j}^k = \alpha_1(y_j, t_k), \quad u_{M_1,j}^k = \beta_1(y_j, t_k), \quad 0 \leq j \leq M_2, k \in \Omega_\tau, \tag{5c}$$

$$u_{i,0}^k = \alpha_2(x_i, t_k), \quad u_{i,M_2}^k = \beta_2(x_i, t_k), \quad 0 \leq i \leq M_1, k \in \Omega_\tau, \tag{5d}$$

其中 $\theta \in R$ 是一个参数,

$$\begin{aligned} R_{i,j}^k = & \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_j, \eta_k) + \frac{\alpha h_x^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi_i, y_j, t_k) + \frac{\alpha h_y^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}(x_i, \zeta_j, t_k) - \\ & b\tau(u_{i,j}^k)^p \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, \eta'_k) + \frac{2\alpha\tau\theta}{h_x^2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, \eta''_k) + \frac{2\alpha\tau\theta}{h_y^2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_j, \eta'''_k) \end{aligned} \tag{6}$$

且 $\eta_k, \eta'_k, \eta''_k, \eta'''_k \in (t_k, t_{k+1}), \xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1}), \zeta_j \in (y_{j-1}, y_{j+1})$.

若初边值问题(1a)–(1d)的解 $u(x, y, t) \in C^{4,2}(\bar{\Omega} \times [0, T])$, 则存在常数 C_1 , 有

$$|R_{i,j}^k| \leq \begin{cases} C_1 \left(\tau + h_x^2 + h_y^2 + \frac{\tau}{h_x^2} + \frac{\tau}{h_y^2} \right), & \theta \neq 0, \\ C_1(\tau + h_x^2 + h_y^2), & \theta = 0 \end{cases} \tag{7}$$

成立.略去方程(5a)中的小量项 $R_{i,j}^k$, 用数值解 $U_{i,j}^k$ 代替精确解 $u_{i,j}^k$, 则可得到下列差分格式:

$$\begin{aligned} \delta_i U_{i,j}^{k+1/2} = & \alpha \left(\frac{U_{i+1,j}^k - 2[\theta U_{i,j}^{k+1} + (1 - \theta)U_{i,j}^k] + U_{i-1,j}^k}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^k - 2[\theta U_{i,j}^{k+1} + (1 - \theta)U_{i,j}^k] + U_{i,j-1}^k}{h_y^2} \right) + \\ & bU_{i,j}^k - bU_{i,j}^{k+1}(U_{i,j}^k)^p, \quad (i, j) \in \Omega_h, k \in \Omega_\tau, \end{aligned} \tag{8a}$$

$$U_{i,j}^0 = \varphi(x_i, y_j), \quad (i, j) \in \bar{\Omega}_h, \tag{8b}$$

$$U_{0,j}^k = \alpha_1(y_j, t_k), \quad U_{M_1,j}^k = \beta_1(y_j, t_k), \quad 0 \leq j \leq M_2, k \in \Omega_\tau, \tag{8c}$$

$$U_{i,0}^k = \alpha_2(x_i, t_k), U_{i,M_2}^k = \beta_2(x_i, t_k), \quad 0 \leq i \leq M_1, k \in \Omega_\tau. \quad (8d)$$

3 差分格式解的性质证明

3.1 差分格式解的存在性

记步长比 $r_x = \alpha\tau/h_x^2, r_y = \alpha\tau/h_y^2$, 则差分格式(8a)可等价地写为

$$U_{i,j}^{k+1} = \frac{1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta)}{1 + b\tau(U_{i,j}^k)^p + 2\theta(r_x + r_y)} U_{i,j}^k + \frac{r_x(U_{i+1,j}^k + U_{i-1,j}^k)}{1 + b\tau(U_{i,j}^k)^p + 2\theta(r_x + r_y)} + \frac{r_y(U_{i,j+1}^k + U_{i,j-1}^k)}{1 + b\tau(U_{i,j}^k)^p + 2\theta(r_x + r_y)}, \quad (i, j) \in \Omega_h, k \in \Omega_\tau. \quad (9)$$

从式(9)可知第 $k+1$ 层的解可由第 k 层的解显式表达出来. 即, 若已知第 k 层的解 $\{U_{i,j}^k \mid (i, j) \in \bar{\Omega}_h\}$, 则由式(9)可得到第 $k+1$ 层的唯一解 $\{U_{i,j}^{k+1} \mid (i, j) \in \bar{\Omega}_h\}$.

3.2 差分格式解的非负性

定理1表明差分格式(8a)—(8d)有非负解.

定理1 在引理1的条件下, 若 $\theta \geq 0, 1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta) \geq 0$, 则有

$$0 \leq U_{i,j}^k, \quad (i, j) \in \bar{\Omega}_h, k \in \bar{\Omega}_\tau. \quad (10)$$

证明 在式(9)中令 $k=0$ 得

$$U_{i,j}^1 = \frac{1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta)}{1 + b\tau(U_{i,j}^0)^p + 2\theta(r_x + r_y)} U_{i,j}^0 + \frac{r_x(U_{i+1,j}^0 + U_{i-1,j}^0)}{1 + b\tau(U_{i,j}^0)^p + 2\theta(r_x + r_y)} + \frac{r_y(U_{i,j+1}^0 + U_{i,j-1}^0)}{1 + b\tau(U_{i,j}^0)^p + 2\theta(r_x + r_y)}. \quad (11)$$

由引理1, $\theta \geq 0, 1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta) \geq 0$ 可知 $U_{i,j}^1 \geq 0 ((i, j) \in \bar{\Omega}_h)$ 成立.

不妨假设式(10)对 $k=1, 2, \dots, K-1$ 成立, 下面证明式(10)对 $k=K$ 时也成立.

类似地, 在式(9)中令 $k=K-1$ 可得

$$U_{i,j}^K = \frac{1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta)}{1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)} U_{i,j}^{K-1} + \frac{r_x(U_{i+1,j}^{K-1} + U_{i-1,j}^{K-1})}{1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)} + \frac{r_y(U_{i,j+1}^{K-1} + U_{i,j-1}^{K-1})}{1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)}. \quad (12)$$

由引理1的条件, $\theta \geq 0$ 和 $1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta) \geq 0$ 可知 $U_{i,j}^K \geq 0 ((i, j) \in \bar{\Omega}_h)$ 成立.

因此, 由数学归纳法可证式(10)成立. \square

3.3 差分格式解的单调性和有界性

定理2表明差分格式(8a)—(8d)的解具有单调性和有界性.

定理2 设 $\{U_{i,j}^k \mid (i, j) \in \bar{\Omega}_h, k \in \bar{\Omega}_\tau\}$ 是差分格式(8a)—(8d)的数值解, 假设初边值条件满足引理1的条件, 则有如下结论成立:

① 当 $p=1$ 时, 在 $\theta \geq 0, 2(r_x + r_y)(1 - \theta) \leq 1$ 的条件下, 差分格式(8a)—(8d)是一个单调格式, 且解 $U_{i,j}^k$ 满足 $0 \leq U_{i,j}^k \leq 1, (i, j) \in \bar{\Omega}_h, k \in \bar{\Omega}_\tau$.

② 当 $p \geq 2$ 时, 在 $\theta \geq 0, 2(r_x + r_y)(1 - \theta) + (p-1)b\tau \leq 1$ 的条件下, 差分格式(8a)—(8d)是一个单调格式, 且解 $U_{i,j}^k$ 满足 $0 \leq U_{i,j}^k \leq 1, (i, j) \in \bar{\Omega}_h, k \in \bar{\Omega}_\tau$.

证明 运用数学归纳法证明该定理. 由引理1可知 $0 \leq U_{i,j}^0 \leq 1, (i, j) \in \bar{\Omega}_h$. 即式(1)和(2)对 $k=0$ 成立. 假设式(1)和(2)对 $k=0, 1, \dots, K-1$ 成立. 下面证明它们对 $k=K$ 仍成立.

在式(8a)中令 $k=K-1$, 则式(8a)可简写成 $U_{i,j}^K = f(U_{i,j}^{K-1}, U_{i-1,j}^{K-1}, U_{i+1,j}^{K-1}, U_{i,j-1}^{K-1}, U_{i,j+1}^{K-1})$ 的形式. 然后对函

数 f 的每一项求偏导,应用定理 1 可得

$$\frac{\partial f}{\partial(U_{i-1,j}^{K-1})} = \frac{r_x}{1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)} \geq 0, \tag{13a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(U_{i+1,j}^{K-1})} = \frac{r_x}{1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)} \geq 0, \tag{13b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(U_{i,j-1}^{K-1})} = \frac{r_y}{1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)} \geq 0, \tag{13c}$$

$$\frac{\partial f}{\partial(U_{i,j+1}^{K-1})} = \frac{r_y}{1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)} \geq 0, \tag{13d}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(U_{i,j}^{K-1})} = & \frac{-b\tau p r_x (U_{i,j}^{K-1})^{p-1} (U_{i+1,j}^{K-1} + U_{i-1,j}^{K-1})}{[1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)]^2} + \frac{-b\tau p r_y (U_{i,j}^{K-1})^{p-1} (u_{i,j+1}^{K-1} + U_{i,j-1}^k)}{[1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)]^2} + \\ & \frac{[1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta)][1 + b\tau(1 - p)(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)]}{[1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)]^2}. \end{aligned} \tag{13e}$$

当 $p = 1$ 时,结合引理 1,式(13e)可化简为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(U_{i,j}^{K-1})} \geq & \frac{[1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta)][1 + 2\theta(r_x + r_y)] - 2b\tau(r_x + r_y)}{[1 + b\tau U_{i,j}^{K-1} + 2\theta(r_x + r_y)]^2} = \\ & \frac{[1 + 2\theta(r_x + r_y) + b\tau][1 - 2(r_x + r_y)(1 - \theta)]}{[1 + b\tau U_{i,j}^{K-1} + 2\theta(r_x + r_y)]^2}. \end{aligned} \tag{14}$$

此时,若 $\theta \geq 0, 2(r_x + r_y)(1 - \theta) \leq 1$ 成立,则有 $\partial f/\partial(U_{i,j}^{K-1}) \geq 0$.

若 $p \geq 2$ 时,结合引理 1,式(13e)可化简为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial U_{i,j}^{K-1}} \geq & \frac{[1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta)][1 + b\tau(1 - p) + 2\theta(r_x + r_y)] - 2b\tau p(r_x + r_y)}{[1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)]^2} = \\ & \frac{[1 + b\tau + 2\theta(r_x + r_y)][1 - b\tau(p - 1) - 2(r_x + r_y)(1 - \theta)]}{[1 + b\tau(U_{i,j}^{K-1})^p + 2\theta(r_x + r_y)]^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

总之,由式(13a)—(13d)、(14)、(15)和归纳假设可知,在满足定理中的条件且 $p \in \mathbf{Z}^+$ 时, $f(U_{i,j}^{K-1}, U_{i-1,j}^{K-1}, U_{i+1,j}^{K-1}, U_{i,j-1}^{K-1}, U_{i,j+1}^{K-1})$ 是单调递增的函数.因此,由归纳假设和函数 f 的单调性可得

$$\begin{aligned} 0 = f(0,0,0,0,0) \leq U_{i,j}^K = \\ f(U_{i,j}^{K-1}, U_{i-1,j}^{K-1}, U_{i+1,j}^{K-1}, U_{i,j-1}^{K-1}, U_{i,j+1}^{K-1}) \leq f(1,1,1,1,1) = 1, \quad i, j \in \Omega_h. \end{aligned}$$

又因为 $0 \leq U_{i,j}^K \leq 1, i, j \in \Gamma$, 所以 $0 \leq U_{i,j}^K \leq 1, i, j \in \bar{\Omega}_h$ 成立.

因此,由数学归纳法可知该定理成立. □

3.4 差分格式解的收敛性

定理 3 令 $u_{i,j}^k$ 表示方程(1a)—(1d)的精确解和 $U_{i,j}^k$ 表示差分格式(8a)—(8d)的数值解.令 $e_{i,j}^k = u_{i,j}^k - U_{i,j}^k, ((i, j) \in \bar{\Omega}_h, k \in \bar{\Omega}_\tau)$, 在满足引理 1 和式(7)的条件下,若 $\theta \geq 0, 1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta) \geq 0$ 成立,则差分格式(8a)—(8d)有如下误差估计:

$$\|e^k\|_\infty \leq \begin{cases} \frac{C_1}{(1+p)b} \left(\tau + h_x^2 + h_y^2 + \frac{\tau}{h_x^2} + \frac{\tau}{h_y^2} \right) \exp \frac{(1+p)bT}{1 + 2\theta(r_x + r_y)}, & \theta \neq 0, \\ \frac{C_1}{(1+p)b} (\tau + h_x^2 + h_y^2) \exp((1+p)bT), & \theta = 0. \end{cases} \tag{16}$$

证明 将方程(5a)—(5d)减去差分格式(8a)—(8d),运用 $a^m - b^m = (a - b) \sum_{l=0}^{m-1} a^l b^{m-l-1}$, 得到如下误差方程:

$$\frac{e_{i,j}^{k+1} - e_{i,j}^k}{\tau} =$$

$$\alpha \left(\frac{e_{i,j}^{k+1} - 2[\theta e_{i,j}^{k+1} + (1-\theta)e_{i,j}^k] + e_{i-1,j}^k}{h_x^2} + \frac{e_{i,j+1}^k - 2[\theta e_{i,j}^{k+1} + (1-\theta)e_{i,j}^k] + e_{i,j-1}^k}{h_y^2} \right) + be_{i,j}^k - be_{i,j}^{k+1}(u_{i,j}^k)^p - bU_{i,j}^{k+1}e_{i,j}^k \sum_{m=0}^{p-1} [(u_{i,j}^k)^m (U_{i,j}^k)^{p-1-m}] + R_{i,j}^k \tag{17}$$

对式(17)两边乘以 τ , 经整理可得

$$[1 + 2(r_x + r_y)\theta + b\tau(u_{i,j}^k)^p]e_{i,j}^{k+1} = r_x(e_{i+1,j}^k + e_{i-1,j}^k) + r_y(e_{i,j+1}^k + e_{i,j-1}^k) + [1 - 2(1-\theta)(r_x + r_y) + b\tau]e_{i,j}^k - b\tau U_{i,j}^{k+1}e_{i,j}^k \sum_{m=0}^{p-1} [(u_{i,j}^k)^m (U_{i,j}^k)^{p-1-m}] + \tau R_{i,j}^k \tag{18}$$

对式(18)两边取绝对值,运用三角不等式, $0 \leq u_{i,j}^k, U_{i,j}^k \leq 1 (\forall i,j,k)$ 引理1的条件和 $1 + b\tau - 2(r_x + r_y)(1 - \theta) \geq 0$, 有

$$\begin{aligned} & |e_{i,j}^{k+1}| [1 + 2\theta(r_x + r_y)] \leq \\ & |e_{i,j}^{k+1}| [1 + 2\theta(r_x + r_y) + b\tau(u_{i,j}^k)^p] \leq \\ & r_x(|e_{i-1,j}^k| + |e_{i+1,j}^k|) + r_y(|e_{i,j-1}^k| + |e_{i,j+1}^k|) + \\ & [1 - 2(r_x + r_y)(1 - \theta) + b\tau] |e_{i,j}^k| - \\ & b\tau U_{i,j}^{k+1} |e_{i,j}^k| \left[\sum_{m=0}^{p-1} (u_{i,j}^k)^m (U_{i,j}^k)^{p-1-m} \right] + \tau |R_{i,j}^k| \leq \\ & r_x(|e_{i-1,j}^k| + |e_{i+1,j}^k|) + r_y(|e_{i,j-1}^k| + |e_{i,j+1}^k|) + \\ & [1 - 2(r_x + r_y)(1 - \theta) + b\tau] |e_{i,j}^k| + b\tau |e_{i,j}^k| + \tau |R_{i,j}^k|. \end{aligned} \tag{19}$$

进一步得到

$$[1 + 2\theta(r_x + r_y)] \|e^{k+1}\|_\infty \leq [1 + 2\theta(r_x + r_y) + b\tau(1+p)] \|e^k\|_\infty + \tau \|R^k\|_\infty \tag{20}$$

在式(20)的两边同除以 $(1 + 2\theta(r_x + r_y))$ 可得

$$\|e^{k+1}\|_\infty \leq \left(1 + \frac{(1+p)b\tau}{1 + 2\theta(r_x + r_y)} \right) \|e^k\|_\infty + \frac{\tau}{1 + 2\theta(r_x + r_y)} \|R^k\|_\infty.$$

对上述不等式运用引理2和式(7)可证式(16)成立. □

4 数值实验

在本节中,运用差分法(8a)–(8d)求解算例1.在计算时,采用拟一致的空间网格,即 $h_x = h_y = h$. T_{CPU} 表示计算所耗时间.

算例1 运用差分法(8a)–(8d)求解如下二维 Fisher-KPP 方程初边值问题:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + bu(1 - u^p), \quad x, y \in \Omega, 0 < t \leq T, \tag{21a}$$

$$u(x, y, 0) = \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}}(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + C \right] + \frac{1}{2} \right\}^{2/p}, \quad x, y \in \bar{\Omega}, \tag{21b}$$

$$\begin{cases} u(a_1, y, t) = \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}}(a_1 \sin \varphi + y \cos \varphi) + \frac{p(p+4)}{4(p+2)}t + C \right] + \frac{1}{2} \right\}^{2/p}, \\ u(b_1, y, t) = \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}}(b_1 \sin \varphi + y \cos \varphi) + \frac{p(p+4)}{4(p+2)}t + C \right] + \frac{1}{2} \right\}^{2/p}, \end{cases} \tag{21c}$$

$$\begin{cases} u(x, c_1, t) = \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}}(x \sin \varphi + c_1 \cos \varphi) + \frac{p(p+4)}{4(p+2)}t + C \right] + \frac{1}{2} \right\}^{2/p}, \\ u(x, d_1, t) = \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}}(x \sin \varphi + d_1 \cos \varphi) + \frac{p(p+4)}{4(p+2)}t + C \right] + \frac{1}{2} \right\}^{2/p}. \end{cases} \tag{21d}$$

当 $\alpha = b = 1$ 时,该方程的精确解为

$$u(x, y, t) = \left\{ \frac{1}{2} \tanh \left[-\frac{p}{2\sqrt{2p+4}}(x \sin \varphi + y \cos \varphi) + \frac{p(p+4)}{4(p+2)}t + C \right] + \frac{1}{2} \right\}^{2/p},$$

其中 $p \geq 1, \varphi$ 和 C 为任意常数. 记差分格式 (8a) — (8d) 的最大范数误差为

$$E_\infty(h_x, h_y, \tau) = \max_{(i, j) \in \bar{\Omega}_h, k \in \bar{\Omega}_h} |u(x_i, y_j, t_k) - U_{i, j}^k|,$$

$$O_{\text{order}} = \log_2 [E_\infty(2h_x, 2h_y, 4\tau) / E_\infty(h_x, h_y, \tau)].$$

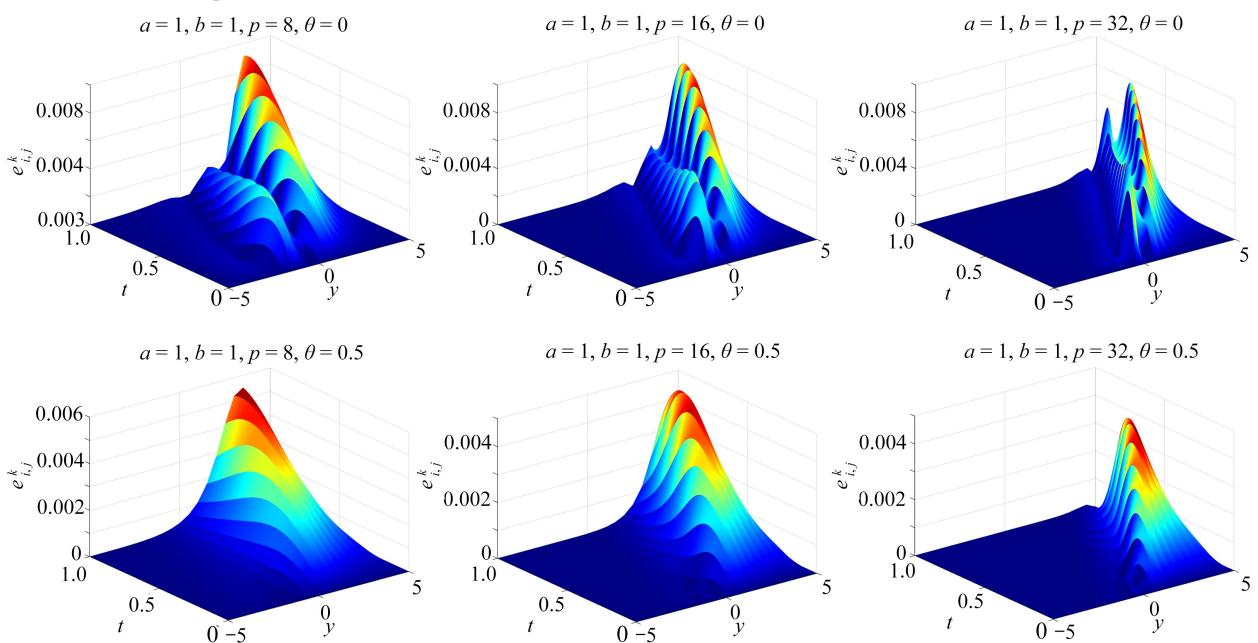
令 $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1], [0, T] = [0, 1]$, 参数 $\alpha = b = 1, \varphi = 5\pi/2, C = -\ln\sqrt{5}$. 此时, 表 1 给出了由差分法 (8a) — (8d) 获得的数值结果. 从表 1 可知, 当 $\theta = 0, \tau = h^2/8$ 时, 差分法 (8a) — (8d) 在最大范数意义下有 $O(h^2)$ 的收敛阶; 当 $\theta \neq 0, \tau = h^4/4$ 时, 差分法 (8a) — (8d) 在最大范数意义下也有 $O(h^2)$ 的收敛阶. 这些结果验证了定理 3 的正确性.

表 1 当 $p = 8, 16, 32$ 时差分格式 (8a) — (8d) 的数值结果

Table 1 The numerical results of difference schemes (8a) — (8d) with $p = 8, 16, 32$

	$h_x = h_y$	τ	$p = 8$		$p = 16$		$p = 32$		$T_{\text{CPU}} / \text{s}$
			$E_\infty(h_x, h_y, \tau)$	O_{order}	$E_\infty(h_x, h_y, \tau)$	O_{order}	$E_\infty(h_x, h_y, \tau)$	O_{order}	
$\theta = 0,$ $\tau = h_x^2/8$	1/2	1/32	2.251 3E-3	-	3.866 5E-3	-	5.148 3E-3	-	0.014 4
	1/4	1/128	5.794 7E-4	1.958 0	9.177 2E-4	2.074 9	1.185 5E-3	2.118 6	0.018 9
	1/8	1/512	1.442 2E-4	2.006 5	2.293 9E-4	2.000 3	2.890 6E-4	2.036 1	0.087 2
$\theta = 0.5,$ $\tau = h_x^4/4$	1/16	1/2 048	3.601 6E-5	2.001 5	5.719 4E-5	2.003 9	7.186 1E-4	2.008 1	1.164 5
	1/2	1/64	1.371 1E-2	-	1.155 7E-2	-	9.215 1E-3	-	0.014 9
	1/4	1/1 024	3.923 3E-3	1.805 2	3.114 3E-3	1.891 8	2.530 6E-3	1.864 5	0.054 4
$\theta = 1,$ $\tau = h_x^4/4$	1/8	1/16 384	1.000 2E-3	1.971 9	8.046 0E-4	1.952 6	6.534 2E-4	1.953 4	2.004 0
	1/16	1/262 144	2.513 2E-4	1.992 6	2.035 0E-4	1.983 2	1.648 7E-4	1.986 7	161.700
	1/2	1/64	2.648 6E-2	-	2.237 0E-2	-	1.778 9E-2	-	0.013 4
$\theta = 1,$ $\tau = h_x^4/4$	1/4	1/1 024	7.800 8E-3	1.763 5	6.153 0E-3	1.862 2	4.961 8E-3	1.842 0	0.063 7
	1/8	1/16 384	1.998 7E-3	1.964 5	1.608 5E-3	1.935 5	1.284 0E-3	1.950 2	2.026 1
	1/16	1/262 144	5.028 7E-4	1.990 8	4.054 0E-4	1.988 3	3.239 5E-4	1.986 8	121.119

令 $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$, 参数 $\alpha = b = 1, \varphi = 3\pi/4, C = -\ln\sqrt{5}$. 在采用网格步长 $h = 1/2, \tau = 1/1\ 000$ 的情况下运用差分格式 (8a) — (8d) 求解该问题. 所得数值结果见图 1. 从图 1 可以看出, 当 $(x, y, t) \in \{0\} \times [-5, 5] \times [0, 1], p$ 和 θ 分别取不同值时, 所得数值解都能够较好地逼近精确解.



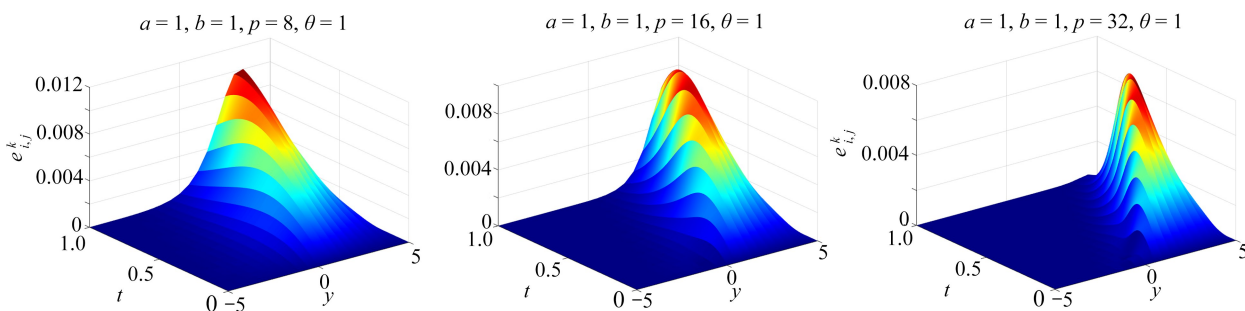


图1 当 $p = 8, 16, 32$, $\alpha = 1$, $b = 1$, $h = 1/2$, $\tau = 1/100$ 和 θ 取不同值时, 在 $x = 0$ 处的误差曲面
 Fig. 1 Error surfaces with $p = 8, 16, 32$, $\alpha = 1$, $b = 1$, $h = 1/2$, $\tau = 1/100$ and different θ values for $x = 0$

下面验证差分格式(8a)—(8d)的数值解的保正性、保界性和保单调性等性质.令 $Q = 2(r_x + r_y)(1 - \theta) - b(p - 1)\tau$.取 $\Omega = [-5, 5] \times [-5, 5]$, $T = 1\ 000$ 及参数 $\alpha = 1, b = 2, C = -\ln\sqrt{5}, p \geq 1, \varphi = 3\pi/4$.此时问题(21a)—(21d)的精确解无法给出.在采用网格步长 $h = 1/2, \tau = 2/100$ 的情况下运用差分格式(8a)—(8d)求解问题(21a)—(21d).所得结果见图2—图4.

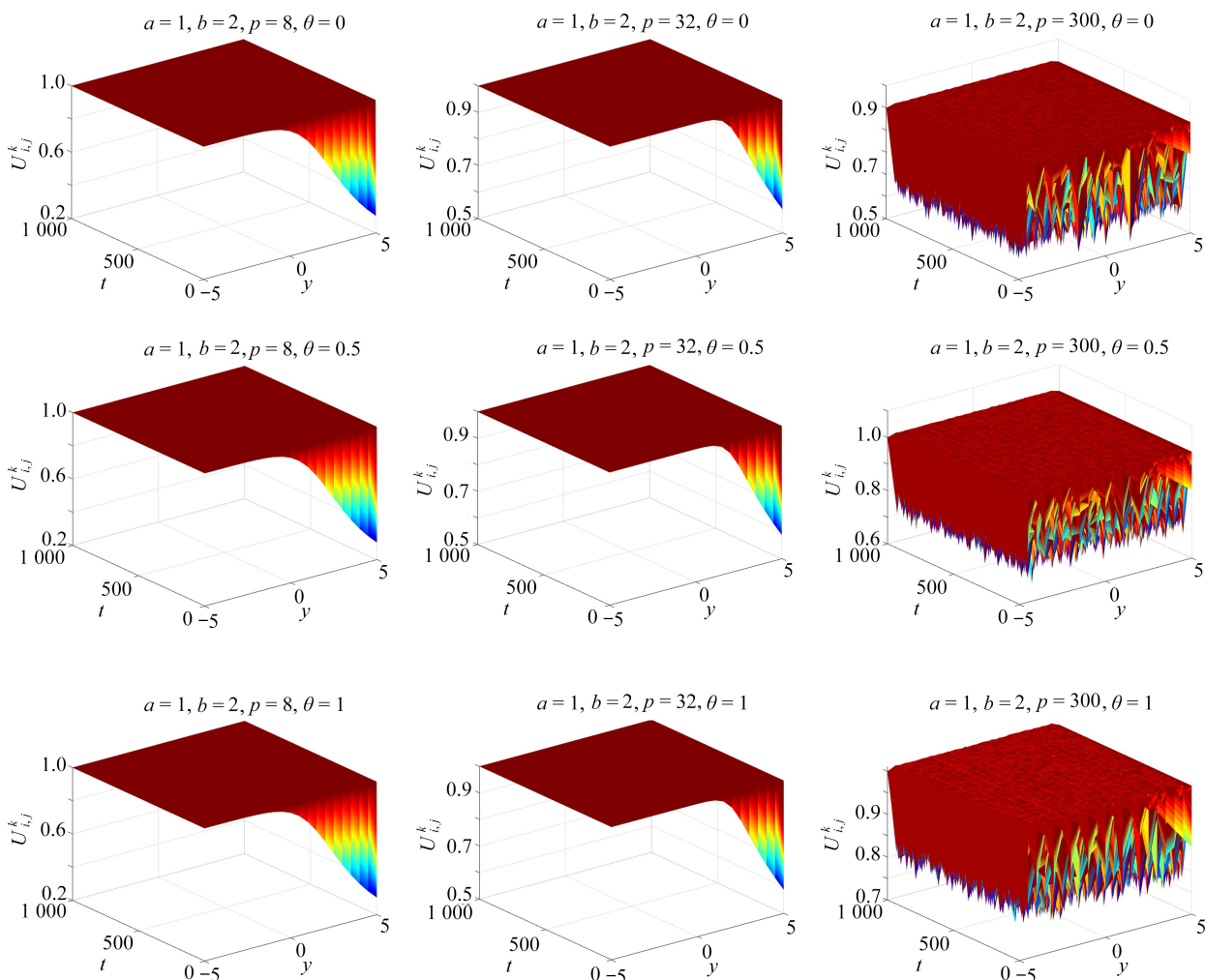


图2 当 $p = 8, 32, 300$, $\alpha = 1$, $b = 2$, $h = 1/2$, $\tau = 1/100$, θ 取不同值时, 在 $x = 2.5$ 处的数值解曲面
 Fig. 2 Numerical solution surfaces with $p = 8, 32, 300$, $\alpha = 1$, $b = 2$, $h = 1/2$, $\tau = 1/100$ and different θ values for $x = 2.5$

取参数 $p = 8, 32, \theta = 0, 0.5, 1$ 时,图 2 和图 3 分别展示了在 $x = 2.5, t = 0.5$ 时的数值解的三维曲面图.从图中不难发现,当 $Q \leq 1$ 时,数值解均落在 $[0, 1]$; 而当 $p = 300, \theta = 0, 0.5, 1$ 时,三种情况下的 $Q > 1$, 此时有部分数值解超出 1,这与理论相符.

从图 4 可以发现,当取参数 $p = 8, \theta = 0, 0.5, 1, x = 2.5$, 而 b 分别取不同值时,若满足 $Q \leq 1$, 则数值解都落在 $[0, 1]$ 内;然而,在 $b = 100$ 的情形下,此时 $Q > 1$, 部分数值解会超出 1.这些均与理论结果相符.

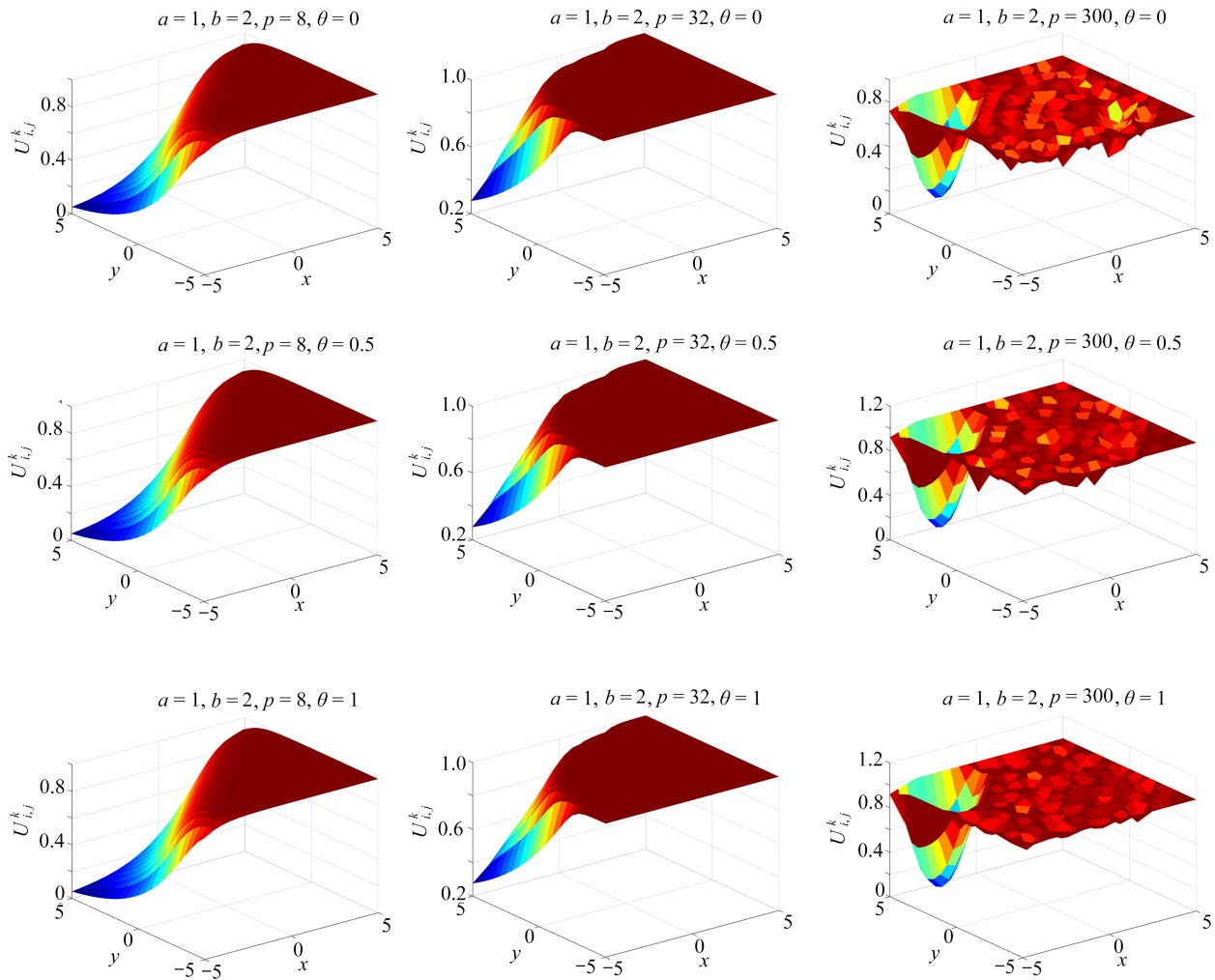
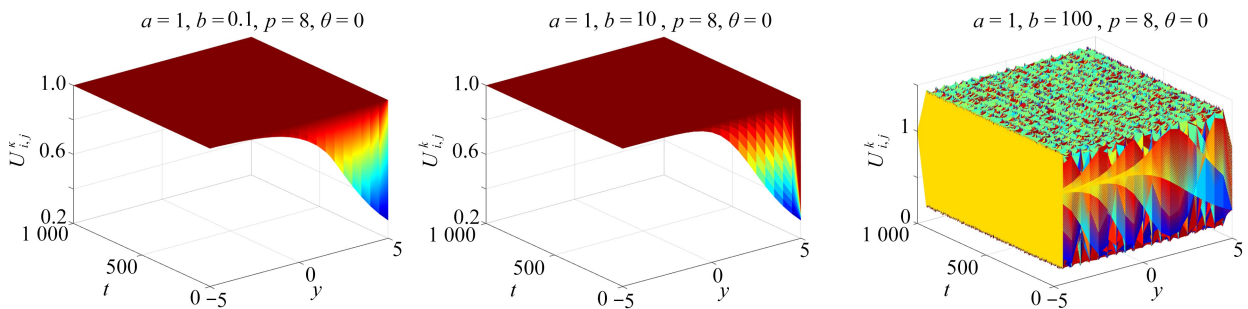


图 3 当 $p = 8, 32, 300, \alpha = 1, b = 2, h = 1/2, \tau = 1/100$ 和 θ 取不同值时,在 $t = 0.5$ 处的数值解曲面

Fig. 3 Numerical solution surfaces with $p = 8, 32, 300, \alpha = 1, b = 2, h = 1/2, \tau = 1/100$ and different θ values for $t = 0.5$



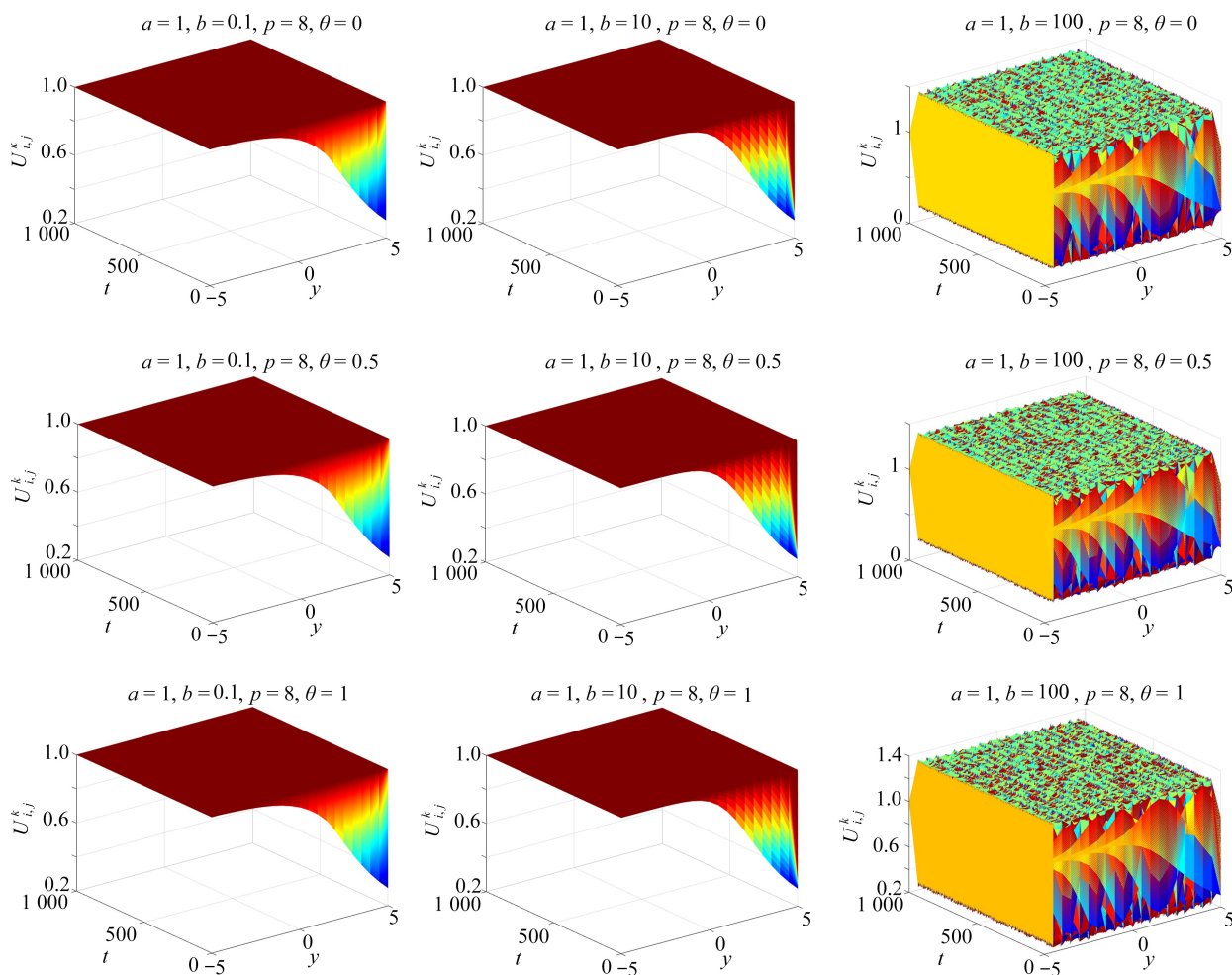


图4 当 $p = 8$, $\alpha = 1$, $b = 0.1, 10, 100$, $h = 1/2$, $\tau = 1/100$ 和 θ 取不同值时, 在 $x = 2.5$ 处的数值解曲面

Fig. 4 Numerical solution surfaces with $p = 8$, $\alpha = 1$, $b = 0.1, 10, 100$, $h = 1/2$, $\tau = 1/100$ and different θ values for $x = 2.5$

5 结 论

本文对二维 Fisher-KPP 方程初边值问题(1a)–(1d)建立了一簇保结构的显式差分格式(8a)–(8d)。经过严格的分析,在满足一定条件下,新算法的数值解具有保正、保界和保单调的性质,且在无穷范数下对 $\theta \neq 0$ 和 $\theta = 0$ 分别有 $O(\tau + h_x^2 + h_y^2 + \tau/h_x^2 + \tau/h_y^2)$ 和 $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$ 的收敛阶。最后,数值结果验证了该差分格式的收敛阶,以及其他的数学性质。

本文算法精度不高,且是条件相容的。今后,我们将研究二维 Fisher-KPP 方程的高精度保最大值原理的差分法。

参考文献 (References) :

- [1] FISHER R A. The wave of advance of advantageous genes[J]. *Annals of Eugenics*, 1937, 7(4): 355-369.
- [2] KOLMOGOROV A, PETROVSKY I, PISCOUNOV N. Tudes de l' quation aved croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique[J]. *Moscow University Mathematics Bulletin*, 1937, 1: 1-25.
- [3] ARONSON D G, WEINBERGER H F. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics[J].

- Advances in Mathematics*, 1978, **30**(1): 33-76.
- [4] WANG X Y. Exact and explicit solitary wave solutions for the generalised fisher equation[J]. *Physics Letters A*, 1988, **131**(4/5): 277-279.
- [5] TYSON J J, BRAZHNIK P K. On traveling wave solutions of Fisher's equation in two spatial dimensions[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2000, **60**(2): 371-391.
- [6] PAO C V. *Nonlinear Parabolic and Elliptic Equations*[M]. New York: Plenum Press, 1992.
- [7] 满淑敏, 高强, 钟万勰. 非完整约束 Hamilton 动力系统保结构算法[J]. 应用数学和力学, 2020, **41**(6): 581-590. (MAN Shumin, GAO Qiang, ZHONG Wanxie. A structure-preserving algorithm for Hamiltonian systems with nonholonomic constraints[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, **41**(6): 581-590. (in Chinese))
- [8] 秦于越, 邓子辰, 胡伟鹏. 无限维 Hamilton 系统稳态解的保结构算法[J]. 应用数学和力学, 2014, **35**(1): 22-28. (QIN Yuyue, DENG Zichen, HU Weipeng. Structure-preserving algorithm for steady-state solution to the infinite dimensional Hamilton system[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(1): 22-28. (in Chinese))
- [9] 刘雪梅, 邓子辰, 胡伟鹏. 饱和多孔弹性杆流固耦合动力响应的保结构算法[J]. 应用数学和力学, 2016, **37**(10): 1050-1059. (LIU Xuemei, DENG Zichen, HU Weipeng. Structure-preserving algorithm for fluid-solid coupling dynamic responses of saturated poroelastic rods[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(10): 1050-1059. (in Chinese))
- [10] QIN W, DING D, DING X. Two boundedness and monotonicity preserving methods for a generalized Fisher-KPP equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2015, **252**: 552-567.
- [11] MACÍAS-DÍAZ J E, PURI A. An explicit positivity-preserving finite-difference scheme for the classical Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piscounov equation[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, **218**(9): 5829-5837.
- [12] MACÍAS-DÍAZ J E, REJNIAK K A. On a conditionally stable nonlinear method to approximate some monotone and bounded solutions of a generalized population model[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2014, **229**: 273-282.
- [13] 孙志忠. 偏微分方程数值解法[M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2012. (SUN Zhizhong. *Numerical Solution to Partial Differential Equations*[M]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese))