

未知干扰下多智能体系统任意预设时间的滑模编队优化*

吴浩, 过榴晓, 张建成

(江南大学 理学院, 江苏 无锡 214000)

摘要: 针对无领导者的多智能体系统, 研究未知干扰下实现任意预设时间分布式编队优化的问题, 最小化所有智能体局部强凸函数构成的全局代价函数. 提出一类基于滑模控制的编队优化算法, 能够在用户预设的时间内实现多智能体系统的编队控制. 该算法分为三个部分: 首先, 采用积分滑模控制策略, 引导预设时间内每个智能体趋于滑模面, 有效地抑制外部干扰; 然后, 设计协议控制引导每个智能体状态到达其局部代价函数的最小值点; 最后, 所有智能体实现无领导编队, 且到达全局代价函数的最小值点. 该算法无需智能体共享邻居的梯度和 Hesse 矩阵信息, 从而节约信息交换成本, 可以处理高度非线性多值强凸代价函数. 数值实验的多个例子验证了设计控制协议算法的有效性和可靠性.

关键词: 多智能体系统; 分布式优化; 编队控制; 预设时间; 滑模控制

中图分类号: O19 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450303

Sliding Mode Formation Optimization for Multi-Agent Systems With Unknown Disturbances in Predefined Time

WU Hao, GUO Liuxiao, ZHANG Jiancheng

(School of Science, Jiangnan University, Wuxi, Jiangsu 214000, P.R.China)

Abstract: For leader-less multi-agent systems, the problem of distributed formation optimization in predefined time under unknown disturbances was studied, and the global cost function composed of local strongly convex functions for all agents was minimized. A class of formation optimization algorithms based on the sliding mode control was proposed to realize the formation control of multi-agent systems within the predefined time. The algorithm was divided into 3 parts: firstly, the integrated sliding mode control strategy was used to guide each agent to approach the sliding mode surface in the predefined time, and the external interference was effectively suppressed; then, the design protocol control was employed to guide each agent state to the minimum point of its local cost function; finally, the leaderless formation was realized for all agents to reach the minimum point of the global cost function. The algorithm does not require agents to share the gradients and Hessian matrix information of neighbors, thus saving the information exchange cost, and can deal with highly nonlinear multi-valued strongly convex cost functions. Several examples of numerical experiments demonstrate the effectiveness

* 收稿日期: 2024-11-07; 修订日期: 2025-02-26

基金项目: 国家自然科学基金(61973137; 61807016); 江苏省自然科学基金(BK20181342; BK20171142)

作者简介: 吴浩(1999—), 男, 硕士生(E-mail: 6231204030@stu.jiangnan.edu.cn);

过榴晓(1975—), 女, 副教授, 博士(通信作者. E-mail: guoliuxiao@jiangnan.edu.cn).

引用格式: 吴浩, 过榴晓, 张建成. 未知干扰下多智能体系统任意预设时间的滑模编队优化[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(4): 426-439.

and reliability of the design control protocol algorithm.

Key words: multi-agent system; distributed optimization; formation control; predefined time; sliding mode control

0 引 言

随着数字系统、通信技术和传感设备的迅猛发展,网络化控制系统在现代工业和技术领域中的应用日益广泛,在智能电网、动力系统、机器人、传感器网络、资源调度和柔性制造系统等多个关键领域发挥着重要作用。在网络化系统中,智能体作为自主决策单元,通过局部本地交互和信息共享来实现全局协同目标。编队控制作为网络化控制系统中的一个重要研究方向,其核心在于通过协调多个智能体的协同工作,不仅能够完成单个智能体难以实现的复杂任务,还显著提升系统的容错性和操作灵活性,使其在动态复杂的工作环境中表现优异。编队控制在多个领域中展现出广泛应用,例如汽车和航空航天中的结构组装、未知环境的探测、复杂地形的导航以及合作运输任务^[1]。Ren 等^[2]深入探讨了多车辆协同控制中的分布式一致性问题,提供关于网络系统内信息一致性挑战的理论见解及应用指导。

近年来,自然界中的集群行为研究引起关注,涉及许多生物群体的协调活动,例如鱼群的集体游动、细菌的集群迁移、蚂蚁的食物运输和鸟类的飞行编队。实际应用中,多个自主智能体需通过协同形成特定队形,并围绕一个最优位置展开,以提升整体协作效率,进而实现预定目标^[3]。这一策略是协同机制的广义延伸,每个智能体的最终位置根据特定配置进行调整。分布式优化由于其在智能电网^[4]、传感器网络^[5]、资源分配^[6]、机器学习^[7]、电力系统经济调度^[8]等领域的重要应用,近年来成为研究热点。其核心目标在于设计分布式算法,使各智能体协同工作,以最小化局部代价函数之和,而每个智能体仅掌握自身的代价函数。智能体通过利用自身及其邻居的信息进行本地计算,得出最优解。

外界干扰源往往具有不可预测性和复杂性,对智能体的控制精度和稳定性构成挑战,可能引发系统偏离预期轨迹,导致无法实现全局最优。因此,研究学者提出一些抑制未知干扰的有效方法。例如,Wang 等^[9]利用凸分析与内部模型方法设计了一种分布式优化控制器,能够在抑制未知干扰的同时,实现非线性多智能体系统的精确优化。Wang 等^[10]基于干扰估计器和前馈-反馈复合控制器的设计,提出分布式主动抗干扰控制框架,有效应对二阶多智能体系统中的匹配和不匹配干扰。Feng 等^[11]提出了结合连续积分滑模控制方案的分布式优化算法,在有限时间内将系统轨迹维持在滑动流形上,有效抑制干扰并实现多智能体系统的最优解。Gong 等^[12]提出一种完全分布式的 GSE 优化算法,通过扰动估计、滑模控制和 GSE 优化,实现在受干扰的不平衡有向图上的分数阶多智能体系统中有限时间内的全局最优解。面对未知干扰的影响,如何设计鲁棒性强且具备抗干扰能力的控制算法,确保智能体系统在复杂环境中依然能够稳定高效地收敛至目标,是目前多智能体系统优化领域亟待解决的关键问题。

同时,设计快速且性能良好的分布式优化算法也面临诸多挑战。Hong 等^[13]研究有限时间内二阶多智能体系统的分布式时变优化,提出了一种新的连通性保持机制及两种优化算法,并通过实验验证了其有效性。Song 等^[14]提出了一种有限时间收敛的分布式连续时间算法,对各节点的严格凸局部代价函数进行全局优化。Shi 等^[15]研究快速原始-对偶梯度动态(FT-PDGD)的有限时间收敛性,并提供在一般约束与代价函数下实现优化的充分条件,同时估计出收敛时间的上限。系统的有限时间稳定性通常依赖于初始条件和系统参数,在某些情况下,初始条件和系统参数的变化可能导致稳定时间无限增长。Zak^[16]首次提出固定时间稳定性的概念,Polyakov^[17]将固定时间稳定性进一步推广,提出分布式固定时间优化算法,使多智能体系统在固定时间内收敛到全局代价函数的最小值,且该时间与初始状态无关^[18-21]。为确保系统在预期时间内达到稳定状态,需揭示系统参数与收敛时间上限之间的关系。设定时间不精确估计,会导致收敛时间估计趋于保守,从而降低系统的瞬态响应质量^[22]。Gong 等^[23]提出一种分布式固定时间优化方法,通过状态反馈和输出反馈控制器,确保二阶异构非线性多智能体系统在固定时间内达成共识并最小化全局时变成本函数。Wang 等^[18]提

出了一种两阶段分布式固定时间优化算法,能够有效降低智能体之间的通信负担.该算法对于设定时间的上界还不够精确.Xu等^[24]提出了一种基于滑模控制器的固定时间优化算法,用于处理干扰项,并实现系统一致性.但收敛时间偏长,无法精准预测系统性能等.

固定时间算法的收敛时间的估计仍和系统参数相关,Song等^[25]提出了预设时间稳定性,其核心思想是通过设计控制算法,使系统能够在用户指定的任意时间达到稳定状态,并且该时间与初值和系统参数无关.Jiménez-Rodríguez等^[26]提出了类似Lyapunov条件以确保动态系统的预设时间稳定性,提供分析预设时间稳定性和最终有界性的一般框架,并用于鲁棒性控制器.De Villeros等^[27]提出了一种分布式预设时间优化算法,结合最优信号生成和滑模控制器,实现二阶多智能体系统在预设时间内达到无领导一致性.Gong等^[28]提出了一种针对一阶多智能体系统的三步式预设时间分布式优化算法,但该算法要求智能体共享邻居局部代价函数的梯度和Hesse矩阵.Jiménez-Rodríguez等^[29]提出了一种预设时间稳定系统的离散化方法,确保系统在离散时间下的预定义时间稳定性.De Villeros等^[30]提出了两阶段的分布式优化算法,可以在预设时间内实现无领导者多智能体系统的编队控制,但该算法的设定时间形式为指数函数,限制了系统的灵活性.

综上所述,本文针对无领导者的多智能体系统,设计新的滑模控制和任意预设时间编队优化控制协议,使得系统在预设时间内形成无领导者队形,并且到达全局代价函数的最优值点.本文的主要贡献如下:

① 相较于文献[28],本文提出的预设时间编队优化控制器不要求智能体共享其邻居局部代价函数的梯度和Hesse矩阵,从而减少了信息交换量,提高系统的隐私保护能力,同时避免因信息共享导致的系统延迟和不稳定问题.

② 区别于有限时间^[12,14]和固定时间控制^[18,23]策略,本文讨论的预设时间滑模编队优化控制策略,收敛速度快,并且收敛时间不依赖于系统的初始条件和控制器参数.

③ 比较文献[30]中的两阶段分布式优化算法,本文提出的预设时间滑模编队优化方法具备更强的抗干扰能力和自适应性,适用于复杂动态环境,提升多智能体系统的灵活性和控制精度.

1 预备知识

1.1 符号

\mathbb{R} 为实数集合, \mathbb{R}^m 表示 m 维Euclid空间.设 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, \mathbf{x}^T 表示向量 \mathbf{x} 转置, $\|\cdot\|$ 为向量的Euclid范数. \mathbf{I}_m 是 m 阶单位矩阵, $\mathbf{0}_m = [0, \dots, 0]^T$ 表示 m 维零向量. $\text{sign}(\cdot)$ 表示符号函数, $\text{sign}(\mathbf{x}) = [\text{sign}(x_1), \dots, \text{sign}(x_m)]^T$.

二次可微函数 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla f(x)$ 和 $\nabla^2 f(x)$ 分别表示函数 f 的梯度和Hesse矩阵.设矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{mp \times nq}$ 表示Kronecker积.设对称矩阵 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , $\mathbf{A} > \mathbf{B}$ 表示 $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ 是正定矩阵.

1.2 图论

设图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$,其中 $\mathcal{V} = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示智能体集合, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ 表示边集合.对应的加权邻接矩阵为 $\mathbf{A}(\mathcal{G}) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$,其中如果 $(j, i) \in \mathcal{E}$,则 $a_{ij} > 0$,否则 $a_{ij} = 0$.设不存在自环,则对所有 $i \in \mathcal{V}$,都有 $a_{ii} = 0$.智能体 i 的邻居集定义为 $N_i = \{j \in \mathcal{V} | (j, i) \in \mathcal{E}\}$.如果图是无向的,则 $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.如果图的任意两个顶点之间至少存在一条路径,图被认为是连通的.顶点 i 的度定义为 $d_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij}$,度矩阵定义为 $\mathbf{D}(\mathcal{G}) = \text{diag}([d_1, \dots, d_N])$.Laplace矩阵定义为 $\mathbf{L}(\mathcal{G}) = \mathbf{D}(\mathcal{G}) - \mathbf{A}(\mathcal{G})$.如果图是无向且连通的,则Laplace矩阵 \mathbf{L} 的特征值为 $0 = \lambda_1(\mathbf{L}) < \lambda_2(\mathbf{L}) \leq \dots \leq \lambda_N(\mathbf{L})$,其中 $\lambda_2(\mathbf{L})$ 是图的代数连通度.

1.3 凸分析

回顾凸分析的一些基本概念.设集合 $C \subseteq \mathbb{R}^m$ 如果对于任意的 $x, y \in C$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$ (其中 $0 \leq \alpha \leq 1$),都有 $\alpha x + (1 - \alpha)y \in C$,则称 C 为凸集.设函数 $f(\cdot): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$,如果其定义域 $\text{dom} f$ 是一个凸集,并且对于所有的 $x, y \in \text{dom} f$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}$ (其中 $0 \leq \alpha \leq 1$),满足 $f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$,则称 f 为凸函数.

设二次连续可微的凸函数 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, 若存在满足常数 $\theta > 0, \Theta > 0$, 对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, 满足

$$\frac{\theta}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 \leq f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{x})^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq \frac{\Theta}{2} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2, \tag{1}$$

$$\theta \mathbf{I}_m \leq \nabla^2 f(\mathbf{x}) \leq \Theta \mathbf{I}_m, \tag{2}$$

其中, $\nabla f(\mathbf{x})$ 满足 Lipschitz 连续性, 即存在常数 $\theta > 0, \Theta > 0$, 使得

$$\theta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\nabla f(\mathbf{x}) - \nabla f(\mathbf{y})\|^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq \Theta \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|,$$

则称 f 为 θ -强凸函数. 如果函数 f 是 θ -强凸函数, 则 $\mathbf{x}^* = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} f(\mathbf{x})$ 是唯一的.

1.4 引理

为求解任意预设时间的分布式优化问题, 设计预设时间控制协议, 引入时变标量函数 $\mu_l(t)$,

$$\mu_l(t) = \frac{T_l^h}{(T_l - t)^h}, \quad t \in [0, T_l), \tag{3}$$

其中, h 是一个常数, 满足 $h > 1; l \in N, T_l$ 是任意预设时间.

引理 1^[25] 若非负连续可微函数 $V(t)$ 满足 $\dot{V}(t) + cV(t) + k\psi(t)V(t) \leq 0, t \in [0, T_l)$, 其中,

$$c \geq 0, k \geq 0, \psi(t) = \begin{cases} \frac{\dot{\mu}_l(t)}{\mu_l(t)}, & 0 \leq t < T_l, \\ \frac{h}{T_l}, & t \geq T_l, \end{cases}$$

则有

$$\begin{cases} V(t) \leq \mu_l(t)^{-h} \exp(-ct) V(0), & t \in [0, T_l), \\ V(t) \equiv 0, & t \in [T_l, \infty). \end{cases}$$

引理 2^[2] 设无向图 \mathcal{G} 的加权邻接矩阵为 $\mathbf{A}(\mathcal{G}) = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, 则任意给定向量 $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^m$, 有

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a_{ij} \mathbf{x}_i^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_j).$$

1.5 问题描述

考虑带外部未知干扰的无领导者多智能体系统, 动力学方程描述为

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = \mathbf{u}_i(t) + \boldsymbol{\omega}_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \tag{4}$$

其中, $\mathbf{x}_i(t) = [x_{i1}(t), \dots, x_{im}(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ 是第 i 个智能体的状态, $\mathbf{u}_i(t) = [u_{i1}(t), \dots, u_{im}(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ 是第 i 个智能体的协议控制输入, $\boldsymbol{\omega}_i(t) = [\omega_{i1}(t), \dots, \omega_{im}(t)]^T \in \mathbb{R}^m$ 是第 i 个智能体的未知干扰.

对每个智能体设计分布式的控制输入协议 $\mathbf{u}_i(t)$, 要求在用户设定任意预设时间 $T (> 0)$ 之前, 实现围绕由局部 θ -强凸函数组成的代价函数 $F(\mathbf{x})$ 的全局最小值点, 形成具有固定偏移量的无领导者编队队形. 系统(4)的无约束优化多智能体编队问题目标表述如下:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} F(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m} \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x}), \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} \lim_{t \rightarrow T} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{x}^*\| = 0, & t \in [T_0, T), \\ \sum_{i=1}^N \|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{x}^*\| = 0, & t \in [T, +\infty), \end{cases} \tag{6}$$

其中, $f_i: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 是第 i 个智能体的局部代价函数, $\mathbf{p}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{h}_i$ 是智能体 i 的距离偏移量, $\mathbf{h}_i \in \mathbb{R}^m$ 为智能体 i 的编队向量, $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^m$ 是未知的最优编队中心. 设问题(5)任何解都具有最优位置, 即

$$F(\mathbf{p}) := \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{p}_i) = \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x}^*), \quad \forall t \geq T.$$

设每个智能体 i 仅掌握自身的局部代价函数 f_i 信息, 无法获知其邻居信息. 则全局代价函数 $F(\mathbf{x}) := \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x})$ 对于所有智能体 i 都是未知的.

假设 1 多智能体系统的通信拓扑是固定、连通、无向的. 智能体可以获取到拓扑图 Laplace 矩阵 \mathbf{L} 的第二小特征值 $\lambda_2(\mathbf{L})$ 信息.

假设 2 设外部扰动 $\boldsymbol{\omega}_i(t)$, $i \in \mathcal{V}$ 有界, 即 $|\boldsymbol{\omega}_i(t)| \leq \rho_i$, 其中 ρ_i 为常数.

假设 3 每个智能体的局部代价函数 f_i 是二次可微的, 具有强凸性且 $\theta_i > 0$, $\nabla f_i(x_i)$ Lipschitz 连续且 $\Theta > 0$.

许多常见类型函数满足假设 3, 比如二次函数、三角函数、具有负幂的指数函数等. 由假设 3, 函数 $\sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x})$ 是 η -强凸的且 $\eta \geq \sum_{i=1}^N \theta_i$, 则存在唯一的优化编队中心 \mathbf{x}^* .

假设 4 每个智能体 i 知道所有局部代价函数的一个上界 $\bar{\Theta} \geq \max_{i \in \mathcal{V}} \Theta_i$ 和其邻居智能体的参数 Θ_j .

2 主要结果

对于未知干扰的无领导者系统(4), 给定预设时间 $T(>0)$, 最小化全局代价函数(5), 实现具有偏移量 $\mathbf{h}_i, i \in \mathcal{V}$ 编队, 设计基于预设时间滑模机制的控制协议如下:

$$\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{u}_i^1(t) + \mathbf{u}_i^2(t), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{u}_i^1(t) = \begin{cases} 0, & T_0 \leq t < T_1, \\ -\frac{1}{2} \left(k \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_2(t)}{\boldsymbol{\mu}_2(t)} + c \right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i(t))]^{-1} \nabla f_i(\mathbf{x}_i(t)), & T_1 \leq t < T_2, \\ -\gamma \left(k \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_3(t)}{\boldsymbol{\mu}_3(t)} + c \right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t))]^{-1} \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)), & T_2 \leq t \leq T_3, \end{cases} \quad (8)$$

$$\mathbf{u}_i^2(t) = -\frac{1}{2} \left(k \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_1(t)}{\boldsymbol{\mu}_1(t)} + c \right) \mathbf{s}_i(t) - r_1 \text{sign}(\mathbf{s}_i(t)), \quad (9)$$

$$\mathbf{s}_i(t) = \mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_i(0) - \int_0^t \mathbf{u}_i^1 dv. \quad (10)$$

取时间 T_0, T_1, T_2, T_3 , 满足 $T_0 < T_1 < T_2 < T_3 = T$. 本文不妨设 $T_0 = 0$, $\boldsymbol{\mu}_l(t)$, $l = 1, 2, 3$ 由式(3)定义.

定理 1 假设 1—4 成立, 则多智能体系统(4)在基于滑模机制的优化算法(7)下, 可实现在任意预设时间 $T(>0)$ 的优化问题(5)和(6).

证明 定理分三步证明. 第一步: 证明所有智能体的状态在预设时间 T_1 内到达滑模面 $\mathbf{s}_i(t)$, 即 $\lim_{t \rightarrow T_1} \mathbf{s}_i(t) = \dot{\mathbf{s}}_i(t) = 0$, 消除干扰.

考虑 Lyapunov 函数:

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{s}_i(t))^T \mathbf{s}_i(t), \quad (11)$$

$V_1(t)$ 沿系统(4)对时间 t 求导, 当 $t \in [T_0, T_1)$, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{s}_i(t))^T (\dot{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{u}_i^1(t)) = \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{s}_i(t))^T \left(-\frac{1}{2} \left(k \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_1(t)}{\boldsymbol{\mu}_1(t)} + c \right) \mathbf{s}_i(t) - r_1 \text{sign}(\mathbf{s}_i(t)) + \boldsymbol{\omega}_i(t) \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(k \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_1(t)}{\boldsymbol{\mu}_1(t)} + c \right) \sum_{i=1}^N (\mathbf{s}_i(t))^T \mathbf{s}_i(t) + \sum_{i=1}^N (\mathbf{s}_i(t))^T (-r_1 \text{sign}(\mathbf{s}_i(t)) + \boldsymbol{\omega}_i(t)) \leq \end{aligned}$$

$$-\left(k \frac{\dot{\mu}_1(t)}{\mu_1(t)} + c\right) V_1(t) - (r_1 - \rho_i) \sum_{i=1}^N |s_i(t)|. \tag{12}$$

不妨假设 $r_1 > \rho_i$, 有

$$\dot{V}_1(t) \leq -\left(k \frac{\dot{\mu}_1(t)}{\mu_1(t)} + c\right) V_1(t), \tag{13}$$

由引理 1, 可得 $\lim_{t \rightarrow T_1} s_i(t) = \dot{s}_i(t) = \mathbf{0}$. 即智能体能在预设时间 T_1 内达到滑模面, 消除干扰.

第二步: 证明每个智能体在预设时间 T_2 内到达其局部代价函数的最小值点.

设 $\mathbf{q}_i(t) = \nabla f_i(\mathbf{x}_i(t))$, 当 $t \in [T_1, T_2)$, 则有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}}_i(t) &= \nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i(t)) \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i(t)) \left(k \frac{\dot{\mu}_2(t)}{\mu_2(t)} + c\right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i(t))]^{-1} \nabla f_i(\mathbf{x}_i(t)) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(k \frac{\dot{\mu}_2(t)}{\mu_2(t)} + c\right) \mathbf{q}_i(t). \end{aligned} \tag{14}$$

对于智能体 $i \in \mathcal{Q}$, 考虑 Lyapunov 函数 $V_2(t)$:

$$V_2(t) = \|\mathbf{q}_i(t)\|^2 \tag{15}$$

是正定且径向无界的. $V_2(t) = 0$, 当且仅当 $\mathbf{q}_i(t) = \mathbf{0}_m$. 另

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) &= 2(\mathbf{q}_i(t))^T \dot{\mathbf{q}}_i(t) = \\ &= -\left(k \frac{\dot{\mu}_2(t)}{\mu_2(t)} + c\right) (\mathbf{q}_i(t))^T \mathbf{q}_i(t) = -\left(k \frac{\dot{\mu}_2(t)}{\mu_2(t)} + c\right) V_2(t). \end{aligned} \tag{16}$$

由引理 1, 当 $t \rightarrow T_2$, $\mathbf{q}_i(t) \equiv \mathbf{0}$, $V_2(t) \equiv 0$. 即每个智能体在预设时间 T_2 内能到达局部代价函数的最小值点.

第三步: 证明所有的智能体在预设时间 T_3 内实现无领导者编队并且到达全局代价函数的最小值点.

当 $t \in [T_2, T_3)$, 由式(4)和式(7)有

$$\dot{\mathbf{x}}_i(t) = -\gamma \left(k \frac{\dot{\mu}_3(t)}{\mu_3(t)} + c\right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t))]^{-1} \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)). \tag{17}$$

定义 Lyapunov 函数 $V_3(\mathbf{p}(t))$:

$$V_3(\mathbf{p}(t)) = \sum_{i=1}^N (f_i(\mathbf{x}^*) - f_i(\mathbf{p}_i(t)) - \nabla f_i(\mathbf{p}_i(t))^T (\mathbf{x}^* - \mathbf{p}_i(t))), \tag{18}$$

其中 $\mathbf{p}(t) = [(\mathbf{p}_1(t))^T, \dots, (\mathbf{p}_N(t))^T]^T$. 由式(1)和式(2), 有

$$V_3(\mathbf{p}(t)) \geq \sum_{i=1}^N \left(\frac{\theta_i}{2}\right) \|\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{x}^*\|^2 \geq 0$$

是正定且径向无界的. $V_3(\mathbf{p}(t)) = 0$, 当且仅当 $\mathbf{p}_i(t) = \mathbf{x}^*$. 对 Lyapunov 函数 $V_3(\mathbf{p}(t))$ 进行求导, 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(\mathbf{p}(t)) &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{x}^*)^T \nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t)) \dot{\mathbf{x}}_i(t) = \\ &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i(t))^T \nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t)) \dot{\mathbf{x}}_i(t) - \mathbf{x}^{*T} \sum_{i=1}^N \nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t)) \dot{\mathbf{x}}_i(t). \end{aligned} \tag{19}$$

由假设 1, 得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t)) \dot{\mathbf{x}}_i(t) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \nabla f_i(\mathbf{p}_i(t)) = \\ &= -\gamma \left(k \frac{\dot{\mu}_3(t)}{\mu_3(t)} + c\right) \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)) = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

由式(19)和式(20), 得

$$\dot{V}_3(\mathbf{p}(t)) = \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i(t))^T \nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t)) \dot{\mathbf{x}}_i(t) =$$

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N (\mathbf{p}_i(t))^T \nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t)) \gamma \left(- \left(k \frac{\dot{\mu}_3(t)}{\mu_3(t)} + c \right) \right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t))]^{-1} \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)) = \\ & - \gamma \left(k \frac{\dot{\mu}_3(t)}{\mu_3(t)} + c \right) \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{p}_i(t))^T (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)). \end{aligned} \quad (21)$$

根据引理 2, 得

$$\dot{V}_3(\mathbf{p}(t)) = - \frac{1}{2} \gamma \left(k \frac{\dot{\mu}_3(t)}{\mu_3(t)} + c \right) \sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t))^T (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)). \quad (22)$$

由

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \in N_i} a_{ij} (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t))^T (\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)) = 2\mathbf{P}^T (\mathbf{L}(\mathcal{G}) \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{P},$$

有

$$\dot{V}_3(\mathbf{p}(t)) = - \gamma \left(k \frac{\dot{\mu}_3(t)}{\mu_3(t)} + c \right) \mathbf{P}^T (\mathbf{L}(\mathcal{G}) \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{P}. \quad (23)$$

因为

$$V_3(\mathbf{p}(t)) \leq \frac{\bar{\Theta}}{\lambda_2(\mathbf{L})} \mathbf{P}^T (\mathbf{L}(\mathcal{G}) \otimes \mathbf{I}_m) \mathbf{P}, \quad (24)$$

将式(24)代入式(23), 有

$$\dot{V}_3(\mathbf{p}(t)) = - \frac{\lambda_2(\mathbf{L}) \gamma}{\bar{\Theta}} \left(k \frac{\dot{\mu}_3(t)}{\mu_3(t)} + c \right) V_3(\mathbf{p}(t)). \quad (25)$$

不妨设 $\gamma \geq \frac{\bar{\Theta}}{\lambda_2(\mathbf{L})}$, 有

$$\dot{V}_3(\mathbf{p}(t)) \leq - \left(k \frac{\dot{\mu}_3(t)}{\mu_3(t)} + c \right) V_3(\mathbf{p}(t)), \quad (26)$$

满足引理 1, 当 $t \in [T_3, +\infty)$ 时, $V_3(\mathbf{p}(t)) \equiv 0$. 即每个智能体在预设时间 T_3 内到达其全局代价函数的最优值点, 实现编队.

拟证明控制策略(7)的有界性:

① 当 $t \in [T_0, T_1)$ 时, 有

$$\dot{V}_1(t) \leq - \left(k \frac{\dot{\mu}_1(t)}{\mu_1(t)} + c \right) V_1(t).$$

根据引理 1,

$$\dot{V}_1(t) \leq \mu_1(t)^{-h} \exp(-c(t)) V_1(0). \quad (27)$$

由式(11), 有

$$\| \mathbf{s}_i(t) \| \leq \sqrt{2\mu_1(t)^{-h} \exp(-c(t)) V_1(0)}. \quad (28)$$

而由式(9), 有

$$\| \mathbf{u}_i^2(t) \| \leq \frac{1}{2} \left\| \left(k \frac{\dot{\mu}_1(t)}{\mu_1(t)} + c \right) \mathbf{s}_i(t) \right\| + r_1 \| \mathbf{s}_i(t) \|. \quad (29)$$

很显然, $\mathbf{u}_i^2(t)$ 在 $t \in [T_0, T_1)$ 有界.

② 当 $t \in [T_1, T_2)$ 时, $\lim_{t \rightarrow T_1} \mathbf{s}_i(t) = \dot{\mathbf{s}}_i(t) = 0$, 则

$$\| \mathbf{u}_i^1(t) \| = \left\| \frac{1}{2} \left(k \frac{\dot{\mu}_2(t)}{\mu_2(t)} + c \right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i(t))]^{-1} \nabla f_i(\mathbf{x}_i(t)) \right\|, \quad (30)$$

由式(2), 可知 $\nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i(t))$ 有界, 并且由于 $f_i(\mathbf{x}_i(t))$ 满足强凸性, 定义域是紧闭的, $\nabla f_i(\mathbf{x}_i(t))$ 也有界.

因此, $\mathbf{u}_i^1(t)$ 在 $t \in [T_1, T_2)$ 有界.

③ 当 $t \in [T_2, T_3)$ 时,由式(24),有

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{L}(\mathcal{G}) \otimes \mathbf{I}_m)\mathbf{P} \geq \frac{\lambda_2(\mathbf{L})}{\bar{\Theta}}V_3(\mathbf{p}(t)). \tag{31}$$

因此

$$\sum_{j \in N_i} a_{ij}(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)) \geq \sqrt{\frac{\lambda_2(\mathbf{L})}{\bar{\Theta}}}V_3(\mathbf{p}(t)), \tag{32}$$

而

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i^1(t) &= -\gamma \left(k \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_3(t)}{\boldsymbol{\mu}_3(t)} + c \right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t))]^{-1} \sum_{j \in N_i} a_{ij}(\mathbf{p}_i(t) - \mathbf{p}_j(t)) \leq \\ & -\gamma \left(k \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_3(t)}{\boldsymbol{\mu}_3(t)} + c \right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t))]^{-1} \sqrt{\frac{\lambda_2(\mathbf{L})}{\bar{\Theta}}}V_3(\mathbf{p}(t)) \leq \\ & -\gamma \left(k \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_3(t)}{\boldsymbol{\mu}_3(t)} + c \right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t))]^{-1} \sqrt{\frac{\lambda_2(\mathbf{L})}{\bar{\Theta}}\boldsymbol{\mu}_3(t)^{-h} \exp(-ct)}V_3(0), \end{aligned} \tag{33}$$

因此

$$\|\mathbf{u}_i^1(t)\| \leq \left\| \gamma \left(k \frac{\dot{\boldsymbol{\mu}}_3(t)}{\boldsymbol{\mu}_3(t)} + c \right) [\nabla^2 f_i(\mathbf{p}_i(t))]^{-1} \right\| \left\| \sqrt{\frac{\lambda_2(\mathbf{L})}{\bar{\Theta}}\boldsymbol{\mu}_3(t)^{-h} \exp(-ct)}V_3(0) \right\|, \tag{34}$$

很显然, $\mathbf{u}_i^1(t)$ 在 $t \in [T_2, T_3)$ 有界.

④ 当 $t \in [T_3, \infty)$ 时,控制策略 $\mathbf{u}_i(t) = \mathbf{0}$.因此,控制策略(7)在整个时间跨度 $t \in [T_0, \infty)$ 上有界即可证得.

注 1 比较文献[28],本文在智能体之间不需要共享局部代价函数 f_i 的梯度和 Hesse 矩阵的信息,因此,在假设 1 和 4 条件下的智能体之间耦合较弱.

注 2 针对不带未知干扰 $\boldsymbol{\omega}_i, i \in \mathcal{V}$ 的多智能体系统(4),文献[14]提出如下分布式有限时间优化控制协议:

$$\mathbf{u}_i(t) = -\gamma (\nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i(t)))^{-1} \sum_{j \in N_i} a_{ij} \text{sign}^\alpha(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)), \quad i \in \mathcal{V}, \tag{35}$$

其中 $0 < \alpha < 1, \gamma > 0, \mathbf{x}_i(0) = \mathbf{x}_i^*, \forall i \in \mathcal{V}$.

协议(35)要求每个智能体 i 的初始状态到达其局部代价函数的最小值点.即假设智能体的初始状态不是其局部最小值,则控制策略(35)无法实现优化目标.

文献[18]提出固定时间分布式优化控制协议:

$$\mathbf{u}_i(t) = \begin{cases} (\nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i(t)))^{-1} (-\gamma_1 \text{sign}^{\alpha_1}(\nabla f_i(\mathbf{x}_i(t))) - \gamma_2 \text{sign}^{\beta_1}(\nabla f_i(\mathbf{x}_i(t)))) & 0 \leq t \leq T, \\ (\nabla^2 f_i(\mathbf{x}_i(t)))^{-1} \left(-k_1 \sum_{j \in N_i} \text{sign}^{\alpha_2}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) - k_2 \sum_{j \in N_i} \text{sign}^{\beta_2}(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)) \right) & t \geq T, \end{cases} \tag{36}$$

其中

$$\begin{aligned} & 0 < \alpha_1 < 1, 0 < \alpha_2 < 1, \beta_1 > 1, \beta_2 > 1, \gamma_1, \gamma_2 > 0, k_1, k_2 > 0, \\ & T = \frac{2^{(1-\alpha_1)/2}}{\gamma_1(1-\alpha_1)} + \frac{m^{(\beta_1-1)/2}}{2^{(\beta_1-1)/2}\gamma_2(\beta_1-1)}. \end{aligned}$$

协议(36)要求智能体 i 到达其局部代价函数的最小值点,然后在固定时间 T 内收敛到全局代价函数的

最小值点, $\mathbf{u}_i(t)$ 的设计需要 8 个可调参数, 固定时间 T 的设计与系统参数有关. 本文设计的预设时间控制协议(8)智能体的初始状态可以任意设置, 并且预设时间 T 的选取与系统参数无关.

3 仿 真

数值实验验证本文提出方法的有效性和可靠性. 考虑以下两种情形: 一致性控制 ($\mathbf{h}_i = \mathbf{0}$) 和编队控制 ($\mathbf{h}_i \neq \mathbf{0}$). 所有仿真在 MATLAB 中进行, 基本步长取 10^{-4} .

3.1 一致性控制

考虑一个由 6 个智能体组成的多智能体系统, 其动力学方程由式(4)描述, 其中 $m = 2$. 通信拓扑由图 1 所示的无向图表示, 满足假设 1. 预设用户给定时间 $T = 1.5$ s.

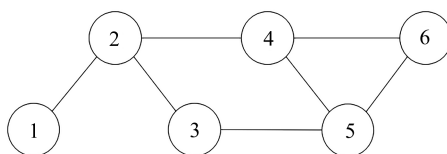


图 1 多智能体系统的通信拓扑

Fig. 1 The communication topology for multi-agent systems

每个智能体的局部代价函数参照参考文献[18], 如下:

智能体 1 的局部代价函数:

$$f_1(x) = (x_1 - 0.5)^2 + 2(x_2 + 1.3)^2 - 0.5x_1x_2,$$

其中, $\theta_1 = 1.881$, $\Theta_1 = 4.118$, 且其局部最小值 $\mathbf{x}_1^* = [0.180\ 7, -1.277\ 4]^T$.

智能体 2 的局部代价函数:

$$f_2(x) = 2(x_1 + 0.7)^2 + 1.5(x_2 + 1.7)^2 + 0.3x_1x_2 + 0.3\sin(0.3x_1 + 1.8) + 0.73\cos(0.5x_2 + 1),$$

其中, $\theta_2 = 2.744\ 2$, $\Theta_2 = 4.122\ 7$, 其局部最小值 $\mathbf{x}_2^* = [-0.577\ 3, -1.619\ 3]^T$.

智能体 3 的局部代价函数:

$$f_3(x) = 2(x_1 - 1.5)^2 + 2(x_2 - 0.3)^2 + \ln(2 + 0.1x_1^2) + \ln(4 + 0.6x_2^2),$$

其中, $\theta_3 = 4.0$, $\Theta_3 = 4.3$, 其局部最小值 $\mathbf{x}_3^* = [1.466\ 9, 0.279\ 3]^T$.

智能体 4 的局部代价函数:

$$f_4(x) = 0.5(x_1 + 0.2)^2 + 1.5(x_2 + 1.6)^2 + 0.5x_1x_2 + (x_1/\sqrt{2 + 0.4x_1^2}) + (0.6x_2/\sqrt{1 + x_2^2}),$$

其中, $\theta_4 = 0.596$, $\Theta_4 = 3.621\ 6$, 其局部最小值 $\mathbf{x}_4^* = [-0.098\ 63, -1.612\ 8]^T$.

智能体 5 的局部代价函数:

$$f_5(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 0.9)^2 + 0.7x_1x_2 + 0.3\exp(-0.4x_1^2) + 0.7\exp(-0.5x_2^2),$$

其中, $\theta_5 = 0.793\ 1$, $\Theta_5 = 2.917\ 3$, 其局部最小值 $\mathbf{x}_5^* = [1.935\ 4, 0.332\ 8]^T$.

智能体 6 的局部代价函数:

$$f_6(x) = 1.5(x_1 - 0.8)^2 + 2(x_2 + 1.5)^2,$$

其中, $\theta_6 = 3$, $\Theta_6 = 4$, 其局部最小值 $\mathbf{x}_6^* = [0.8, -1.5]^T$. 全局最小值点 $\mathbf{x}^* = [0.676\ 9, -0.949\ 7]^T$, 其中

$$F(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^N f_i(\mathbf{x}^*) = 45.88.$$

智能体的初始状态 $\mathbf{x}_i(0)$, $i = 1, 2, \dots, 6$ 取 $[-3, 3]$ 区间的随机数. 图 2 给出在预设时间滑模优化协议(7)下多智能体系统的状态演化图.

图 2 显示, 在 $T_1 = 0.5$ s 时刻, 智能体在未知干扰 $\boldsymbol{\omega}_i(t) = 1.5[\sin(i\pi t), \sin(i\pi t)]$ 的情况下, 消除干扰, 进入滑模面 $\mathbf{s}_i(t) = \mathbf{0}$. 在 $T_2 = 1$ s 时刻, 每个智能体到达其局部函数的最小值. 在 $T = T_3 = 1.5$ s 时刻, 多智能体系统到达全局最小值点, 并实现无领导者一致性.

图 3 和图 4 分别给出了有限时间^[14]优化协议(35)和固定时间^[18]优化协议(36)下的多智能体系统状态演化图.与本文图 2 对照,图 3 所示的有限时间和图 4 所示的固定时间到达全局代价函数最小值的收敛时间偏长.在相同参数条件下,本文采用了一种允许用户设定具体收敛时间的预设时间控制方法.如图 2 所示,通过简化控制协议(7)中的三个核心参数 T_1, T_2 和 T_3 ,该方法确保控制的三个阶段的收敛轨迹都在预定的时间范围内完成,并且收敛迅速.

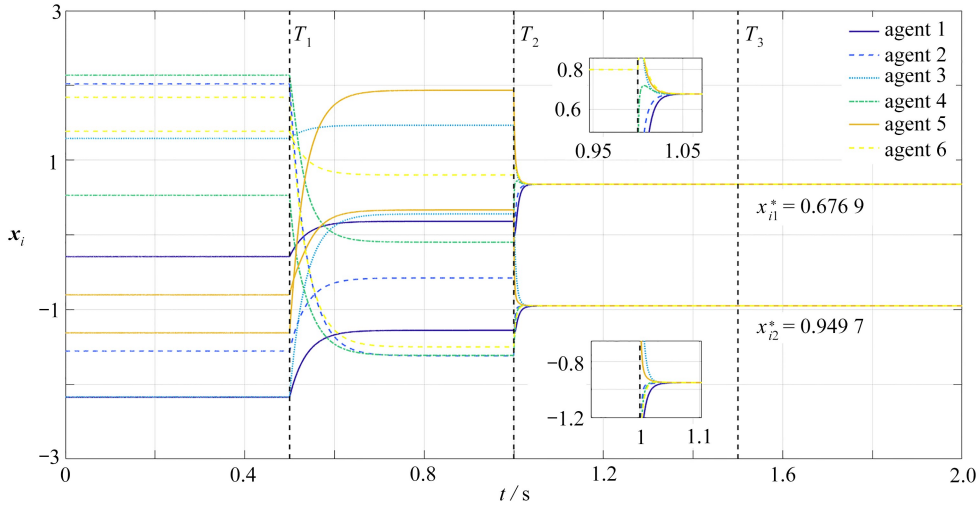


图 2 预设时间收敛的状态 $x_i(t), i = 1, 2, \dots, 6$ 演化图

Fig. 2 State evolution $x_i, i = 1, 2, \dots, 6$ of the predefined-time convergence

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同。

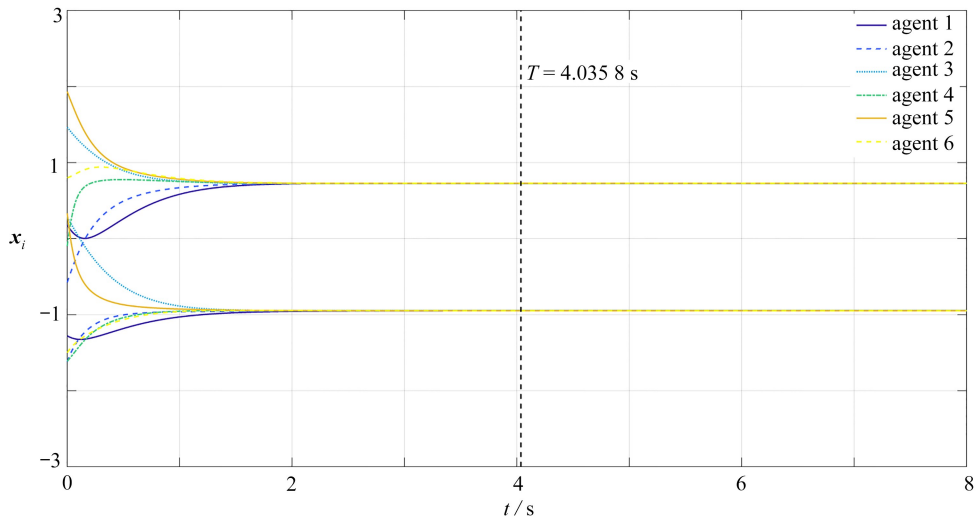


图 3 有限时间收敛的状态 $x_i(t), i = 1, 2, \dots, 6$ 演化图

Fig. 3 State evolution $x_i, i = 1, 2, \dots, 6$ of the finite-time convergence

图 5 详细展示了全局代价函数的变化.尽管全局代价函数 $F(x)$ 在 $t \in [T_1, T_2]$ 时达到最小值,但并不是优化问题(5)的最小值.在仿真例子中,控制协议也可以应用于高度非线性强凸代价函数.表 1 是时间数据对比分析.

3.2 编队控制

考虑一个具有 6 个智能体的多智能体系统,其动态方程由(4)给出,其中 $m = 2$.通信拓扑由图 1 所示的无向图描述,满足假设 1.仍然预设用户给定时间 $T = 1.5$ s.

期望的编队图形是一个嵌入半径为 0.2 的正六边形, $h_i = 0.2 [\cos((i - 1)\pi/3), \sin((i - 1)\pi/3)]^T$,

$i = 1, 2, \dots, 6$.

每个智能体的局部代价函数给出如下: $f_i = (x_i - x_i^s)^2 + (y_i - y_i^s)^2, i = 1, 2, \dots, 6$, 其中 $[x_i^s, y_i^s]^T$ 指的是智能体 i 的特定位置, 且与其局部最优点 \mathbf{x}_i^* 重合. 假设 $[x_1^s, y_1^s]^T = [0.5, 0.5]^T, [x_2^s, y_2^s]^T = [-0.5, 1]^T, [x_3^s, y_3^s]^T = [-1, 0.5]^T, [x_4^s, y_4^s]^T = [-1.4, 0]^T, [x_5^s, y_5^s]^T = [-1, -1]^T, [x_6^s, y_6^s]^T = [0.2, -0.3]^T$. 因此, 全局最优点 \mathbf{x}^* 的位置是 $[-0.5333, 0.1167]^T$, 且其全局代价函数 $F(\mathbf{x}^*) = 7.36$.

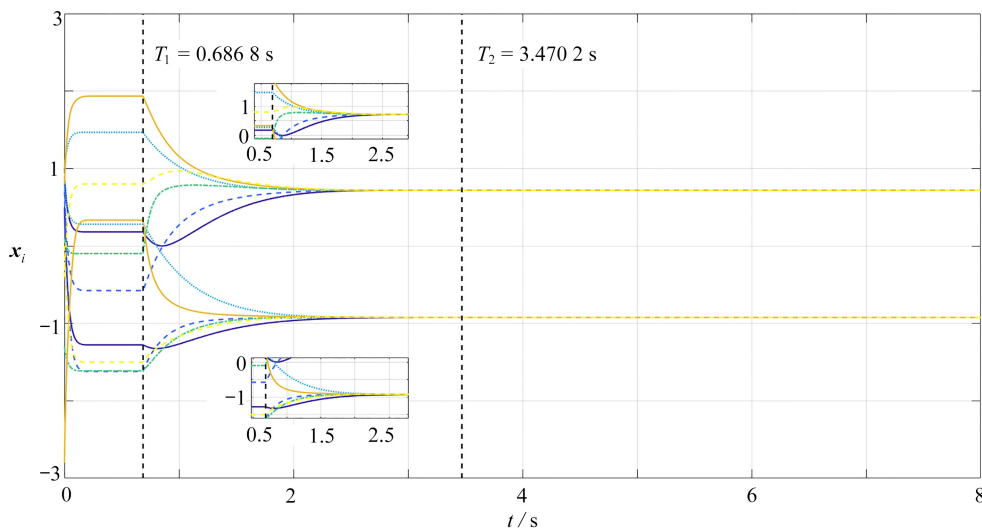


图4 固定时间收敛的状态 $x_i(t), i = 1, 2, \dots, 6$ 演化图

Fig. 4 State evolution $x_i, i = 1, 2, \dots, 6$ of the fixed-time convergence

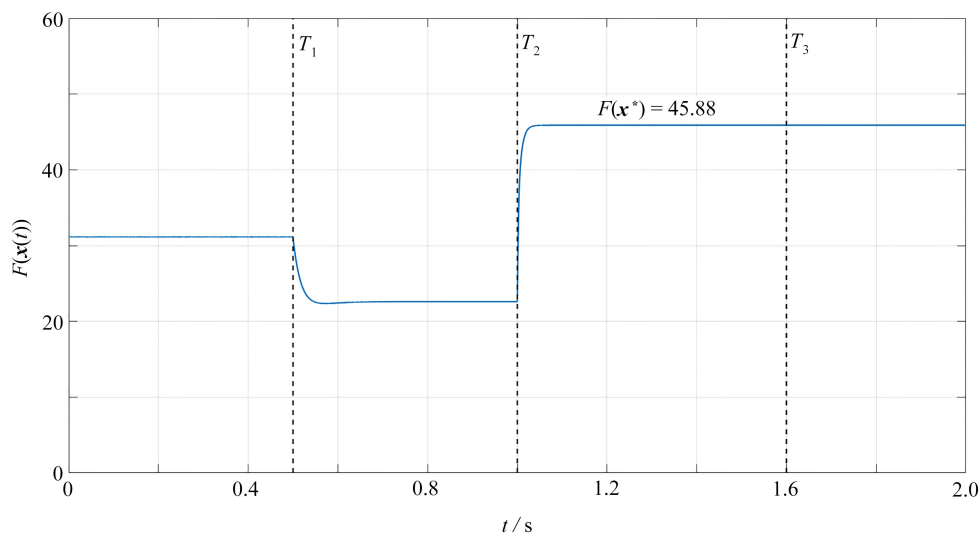


图5 全局代价函数 $F(x)$ 演化图

Fig. 5 The evolution of global cost function $F(x)$

表1 时间数据对比分析

Table 1 Comparative analysis of time data

	time to reach the local minimum/s	time to reach the global minimum/s
finite time	no	4.032 8
fixed time	0.686 8	3.470 2
predefined time	1	1.5

图6 给出未知干扰下6个智能体的轨迹图. 结果显示, 在 $T_1 = 0.5$ s 时刻, 智能体受干扰 $\omega_i(t) = 1.5[\sin(i\pi t); \cos(i\pi t)]$ 影响, 在滑模控制协议(9)的作用下, 始终能在初始状态位置保持较小变化. 在 $T_2 =$

1 s 时刻,多智能体系统的控制协议(8)引导每个智能体到达其局部最优值 $[x_i^s, y_i^s]^T$. 在 $T = T_3 = 1.5$ s 时刻,多智能体受控制协议(8)的影响,智能体到达其编队位置正六边形,其中五角星点代表的是编队位置的中心点,即全局最优位置 x^* .

图 7 详细展示了全局代价函数 $F(p(t))$ 的变化.当 $p_i(t) = p_j(t)$, $F(p(t))$ 在 $t = T$ 收敛到全局最优值 $\sum_{i=1}^N f_i(x^*) = 7.36$.

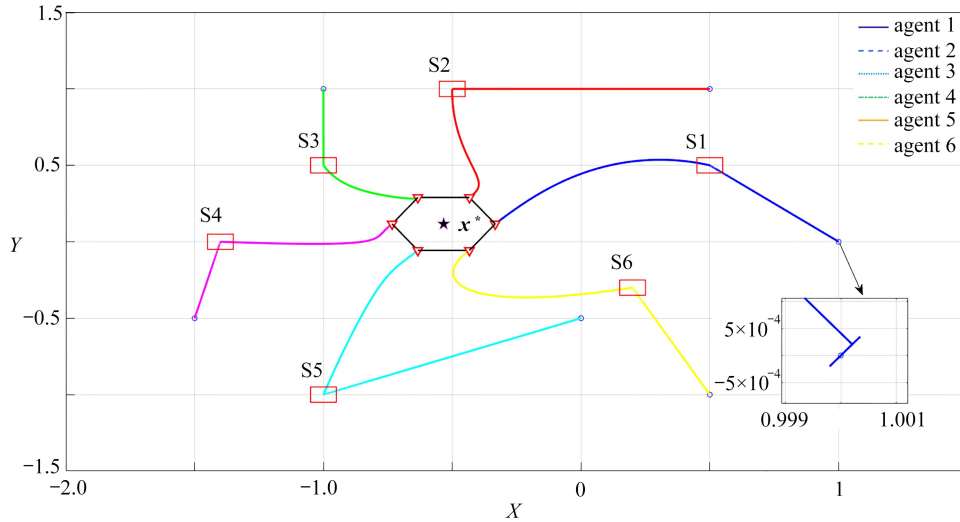


图 6 未知干扰下每个智能体的轨迹
Fig. 6 Trajectories for each agent under unknown disturbances

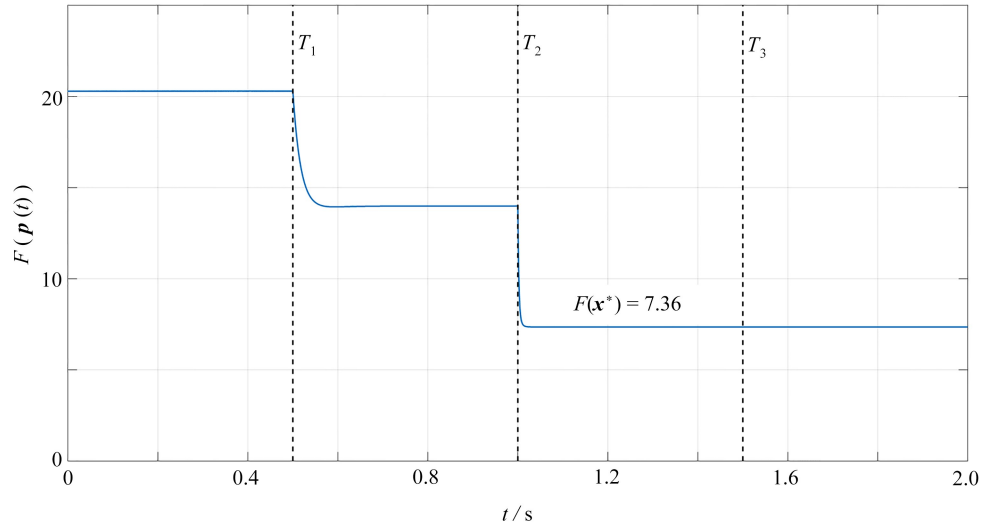


图 7 未知干扰下全局代价函数 $F(p(t))$ 演化图
Fig. 7 The evolution of $F(p(t))$ under unknown disturbances

4 结束语

本文研究未知干扰下无领导多智能体系统的任意预设时间编队优化问题,提出了一种基于滑模控制的任意预设时间分布式优化算法.首先,该算法有效地实现了智能体在预设时间 T_1 对外部干扰的鲁棒抑制;然后,引导智能体在预设时间 T_2 到达其局部代价函数的最小值点;最后,在预设时间 T_3 到达其全局代价函数的最小值点,实现编队,完成优化过程.未来的研究可进一步拓展到有向通信拓扑和高阶动态系统的预设时间优化问题,以进一步提升多智能体系统在复杂环境中的实用性和适应性.

参考文献(References):

- [1] LIU Y, JIA Y. An iterative learning approach to formation control of multi-agent systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2012, **61**(1): 148-154.
- [2] REN W, BEARD R W. *Distributed Consensus in Multi-Vehicle Cooperative Control*[M]. London: Springer London, 2008: 71-82.
- [3] ZHAO Y, LIU Y F, WEN G H, et al. Distributed optimization for linear multiagent systems: edge and node-based adaptive designs[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(7): 3602-3609.
- [4] BRAUN P, GRÜNE L, KELLETT C M, et al. A distributed optimization algorithm for the predictive control of smart grids[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2016, **61**(12): 3898-3911.
- [5] DOUGHERTY S, GUAY M. An extremum-seeking controller for distributed optimization over sensor networks[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(2): 928-933.
- [6] ZHU Y, REN W, YU W, et al. Distributed resource allocation over directed graphs via continuous-time algorithms[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021, **51**(2): 1097-1106.
- [7] NEDIC A. Distributed gradient methods for convex machine learning problems in networks: distributed optimization[J]. *IEEE Signal Processing Magazine*, 2020, **37**(3): 92-101.
- [8] YAN Y, CHEN Z, VARADHARAJAN V, et al. Distributed consensus-based economic dispatch in power grids using the paillier cryptosystem[J]. *IEEE Transactions on Smart Grid*, 2021, **12**(4): 3493-3502.
- [9] WANG X, HONG Y, JI H. Distributed optimization for a class of nonlinear multiagent systems with disturbance rejection[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2016, **46**(7): 1655-1666.
- [10] WANG X, LI S, WANG G. Distributed optimization for disturbed second-order multiagent systems based on active antidisturbance control[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2019, **31**(6): 2104-2117.
- [11] FENG Z, HU G, CASSANDRAS C G. Finite-time distributed convex optimization for continuous-time multiagent systems with disturbance rejection[J]. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 2019, **7**(2): 686-698.
- [12] GONG P, WANG Q G, AHN C K. Finite-time distributed optimization in unbalanced multiagent networks: fractional-order dynamics, disturbance rejection, and chatter avoidance[J]. *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*, 2025, **22**: 6691-6701.
- [13] HONG H, BALDI S, YU W, et al. Distributed time-varying optimization of second-order multiagent systems under limited interaction ranges[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2022, **52**(12): 13874-13886.
- [14] SONG Y F, CHEN W S. Finite-time convergent distributed consensus optimisation over networks[J]. *IET Control Theory & Applications*, 2016, **10**(11): 1314-1318.
- [15] SHI X, XU X, CAO J, et al. Finite-time convergent primal-dual gradient dynamics with applications to distributed optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(5): 3240-3252.
- [16] ZAK M. Terminal attractors in neural networks[J]. *Neural Networks*, 1989, **2**(4): 259-274.
- [17] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2012, **57**(8): 2106-2110.
- [18] WANG X, WANG G, LI S. A distributed fixed-time optimization algorithm for multi-agent systems[J]. *Automatica*, 2020, **122**: 109289.
- [19] GARG K, BARANWAL M, PANAGOUD. A fixed-time convergent distributed algorithm for strongly convex functions in a time-varying network[C]//2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC), Jeju, Republic of Korea. IEEE, 2021: 4405-4410.
- [20] LI Y, HE X, XIA D. Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems with time-varying objective function[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2022, **32**(11): 6523-6538.

- [21] YU Z, YU S, JIANG H, et al. Distributed fixed-time optimization for multi-agent systems over a directed network[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2021, **103**(1): 775-789.
- [22] SÁNCHEZ-TORRES J D, GÓMEZ-GUTIÉRREZ D, LÓPEZ E, et al. A class of predefined-time stable dynamical systems[J]. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 2018, **35**(S1): i1-i29.
- [23] GONG P, HAN Q L. Distributed fixed-time optimization for second-order nonlinear multiagent systems: state and output feedback designs[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2024, **69**(5): 3198-3205.
- [24] XU X, YU Z, JIANG H. Fixed-time distributed optimization for multi-agent systems with input delays and external disturbances[J]. *Mathematics*, 2022, **10**(24): 4689.
- [25] SONG Y, WANG Y, HOLLOWAY J, et al. Time-varying feedback for regulation of normal-form nonlinear systems in prescribed finite time[J]. *Automatica*, 2017, **83**: 243-251.
- [26] JIMÉNEZ-RODRÍGUEZ E, MUÑOZ-VÁZQUEZ A J, SÁNCHEZ-TORRES J D, et al. A Lyapunov-like characterization of predefined-time stability[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2020, **65**(11): 4922-4927.
- [27] DE VILLEROS P, SÁNCHEZ-TORRES J D, MUÑOZ-VÁZQUEZ A J, et al. Distributed predefined-time optimization for second-order systems under detail-balanced graphs[J]. *Machines*, 2023, **11**(2): 299.
- [28] GONG X, CUI Y, SHEN J, et al. Distributed optimization in prescribed-time: theory and experiment[J]. *IEEE Transactions on Network Science and Engineering*, 2022, **9**(2): 564-576.
- [29] JIMÉNEZ-RODRÍGUEZ E, ALDANA-LÓPEZ R, SÁNCHEZ-TORRES J D, et al. Consistent discretization of a class of predefined-time stable systems[J]. *IFAC-Papers on Line*, 2020, **53**(2): 628-633.
- [30] DE VILLEROS P, SÁNCHEZ-TORRES J D, DEFOORT M, et al. Predefined-time formation control for multiagent systems-based on distributed optimization[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2023, **53**(12): 7980-7988.