

基于边界采样控制的随机反应扩散系统稳定性*

王云竹

(浙大城市学院 理学基础教育中心, 杭州 310015)

摘要: 利用边界采样控制讨论了随机反应扩散系统(stochastic reaction-diffusion system, SRDS)稳定性问题.当系统状态可以全部获取时,设计了一个边界采样控制器(boundary sampling controller, BSC),构建了与采样间隔相关的分段不连续 Lyapunov 函数.对于 SRDS,利用空间积分型 Wirtinger 不等式和同构离散变换,得到了矩阵不等式形式的均方指数稳定和鲁棒均方指数稳定的充分条件.当系统状态无法完全获得时,提出了一种基于观测器的边界采样控制策略,分别得到了系统均方指数稳定和鲁棒均方指数稳定的研究结果.最后,通过三个数值例子验证了所提方法的可行性.

关键词: 边界采样控制; 稳定性; 随机反应扩散系统; 观测器

中图分类号: O231.3 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.450309

Stability of Stochastic Reaction-Diffusion Systems via Boundary Sampled-Data Control

WANG Yunzhu

(Foundation Science Education Center, Hangzhou City University,
Hangzhou 310015, P.R.China)

Abstract: The stability of stochastic reaction-diffusion systems under boundary sampling control was discussed. With the fully accessible system state, a boundary sampled-data controller was proposed, and a piecewise discontinuous Lyapunov function related to the sampling interval was constructed. For stochastic reaction-diffusion systems, sufficient conditions for mean-square exponential stability, both in nominal and robust settings, were obtained with the Wirtinger inequality for spatial integrals and isomorphic discrete transformations, in the form of matrix inequalities. With the not fully accessible system state, an observer-based boundary sampled-data control strategy was proposed, and results for the mean-square exponential stability and the robust mean-square exponential stability of the system were obtained, respectively. Finally, the feasibility of the proposed methods was demonstrated through 3 numerical examples.

Key words: boundary sampled-data control; stability; stochastic reaction-diffusion system; observer

0 引 言

在现代控制理论中,随机反应扩散系统(SRDS)是一类常见的系统模型.它能够模拟和描述自然界和工程中的多种现象,如谣言传播、疾病扩散、肿瘤免疫等^[1-3],因而被成功应用到多个学科中,受到了广泛关注.然而,与大多数系统模型类似,SRDS 也不可避免地会受到外部随机噪声的影响,如环境变化、测量误差和信

* 收稿日期: 2024-11-18; 修订日期: 2025-12-15

作者简介: 王云竹(1992—),女,博士(E-mail: hzcu_wyz@163.com).

引用格式: 王云竹. 基于边界采样控制的随机反应扩散系统稳定性[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(4): 468-486.

号干扰等.这些因素的存在给 SRDS 的稳定性和鲁棒性研究均带来极大挑战^[4-5].

出于节约成本和简化控制过程考量,边界控制策略在特定需求下(如城市交通、水污染监测、海洋立管机械臂等)的优势明显,已经受到越来越多的关注.边界控制策略通过在系统边界上施加控制作用,实现了对系统行为的有效调控.在 SRDS 均方指数稳定性方面,研究边界控制已经发表了许多重要成果.例如,文献[6]利用反步法解决了具有变空间系数的线性常系数耦合的边界镇定问题.文献[7]通过边界控制得到了关于耦合 SRDS 的均方渐近同步和 H_2 同步的准则.随着数字化技术的发展,采样控制在工程实践中的重要性也日益显现.文献[8-12]中提出的处理非连续性的方法,如离散方法、脉冲方法和输入延迟方法,为 SRDS 的控制研究提供了新的思路.特别是边界采样控制器(BSC)的提出,不仅顺应数字化趋势,而且降低了成本和操作复杂性,符合实际工程需求^[13-16].

此外,良好控制器的设计离不开对系统状态的准确把握,而系统状态往往难以全部获得.此时,系统状态估计技术发挥了重要作用.文献[17]使用无限维观测器,解决了级联常微分方程-双曲系统的状态估计问题.文献[18]则解决了非线性随机系统的自适应状态估计问题.文献[19]将基于边界观测器的控制应用于具有随机跳变的级联系统,得到了观测器误差系统均方指数稳定的条件.文献[20]为具有延迟和执行器的随机非线性系统设计了一个基于观测器的 H_2 控制器,通过模式依赖 Lyapunov 函数推导出随机稳定性判定准则.这些成果考虑了确定性系统和随机系统,并涉及了鲁棒系统,但是,目前还未提出基于边界采样的观测器设计方法,特别是系统中包含不确定参数的情况.

在采样控制框架下,使用分段不连续 Lyapunov 泛函可以有效降低方法的保守性.文献[21]研究了一个线性有限维系统,通过构造一组不连续泛函,仅在采样瞬间保持正定,从而获得了较少的保守性条件.文献[22]为具有时变延迟的有限维神经网络引入了一种新的 Lyapunov 泛函,能够充分捕捉两个区间上的采样信息.文献[23]则在 Lyapunov 泛函中加入了包含自由矩阵的时变不连续项,降低了保守性.然而,这些性能优异的方法并不能直接应用于随机系统,在进行相应的修改完善后才能适应随机系统的特性^[24-25].

可以看出,现有研究已经取得了丰硕的成果.但大多考虑确定性系统或常微分系统,边界控制策略的研究成果还相对较少.针对随机偏微分系统,边界采样控制策略的稳定性相关成果更是少见.而且,对于随机偏微分系统,不对其进行降维处理,或使其转化为确定性系统或常微分系统,能够较好地保留其特有的二阶导数特性,因此,研究随机系统的空间二阶导数扩散项与时间离散项耦合的技巧具有明显的理论意义.并且,由于时间变量与随机系统自身特性紧密相关,导致面向确定性系统构造 Lyapunov 泛函的方法难以直接用来处理随机系统.因此,在文献[26]的启发下,本文尝试设计 BSC 和基于观测器的边界采样控制器(observer-based boundary sampling controller, OBBS),构造与采样间隔相关的、分段不连续的 Lyapunov 泛函,研究 SRDS 的稳定性和鲁棒稳定性问题.

本文的创新点总结如下:①结合文献[26]的工作,设计了一个适合实际应用的 BSC,并利用同构离散变换处理控制器采样带来的离散信号;②为充分利用采样信息,降低结果保守性,针对 SRDS 设计了一种新颖的依赖采样间隔的分段不连续 Lyapunov 泛函;③当系统状态无法全部获得时,设计了一种更贴合实际的 OBBS,进一步拓展了均方指数稳定性和鲁棒均方指数稳定性成果.

1 问题描述与预备知识

符号说明 $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 是一个完备概率空间,其中 Ω 是样本空间, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 是随时间 t 变化的 σ -代数, P 是概率测度; $L^2(\mathbb{R}^n)$ 表示 \mathbb{R}^n 上的平方可积函数空间; $\mathcal{H}^1(0, l)$ 表示 Sobolev 空间,其包含的函数是绝对连续的且导数平方可积; $Q > 0 (Q \geq 0)$ 表示 Q 是一个正定(半正定)矩阵,而 $Q < 0 (Q \leq 0)$ 表示 Q 是一个负定(半负定)矩阵; I 是适当维数的单位矩阵; $*$ 表示矩阵中的对称项; K^T 表示矩阵 K 的转置,对于方阵 K 而言, K_{sym} 表示 $K^T + K$.

考虑如下 SRDS:

$$dz(x, t) = \left[Az(x, t) + B \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \right] dt + Cz(x, t) dW(t), \quad (1)$$

其初始条件为

$$z(x, 0) = \phi(x). \quad (2)$$

Neumann 边界条件为

$$z_x(0, t) = \mathbf{0}, z_x(1, t) = \mathbf{u}(t), \quad (3)$$

其中, $z(x, t) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ 表示系统状态的一组平方可积的列向量, $x \in [0, 1]$ 是空间变量, $t \in [0, \infty)$ 是时间变量; 矩阵 $A, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $B > \mathbf{0}$; $\phi(x)$ 是一个初始连续函数; $W(t)$ 是一个定义在 $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ 上的 1 维标准 Brown 运动.

对系统(1)设计如下时间采样控制器:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K} \int_0^1 z(x, t_k) dx, \quad (4)$$

其中, $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 是待设计的增益矩阵, $t \in [t_k, t_{k+1})$, $\varepsilon \leq t_{k+1} - t_k = h_k < h$, $k = 0, 1, 2, \dots, t_0 = 0$.

注 1 与文献[26]相比, 本文不仅将边界控制器的研究成果扩展到了边界采样控制(BSC)策略, 还综合考虑了离散项、扩散项和随机项的影响. 在 BSC 策略中, 执行器不需要在边界上进行实时信号传输, 这简化了控制过程. 因此, 本文提出的策略具有更低的资源消耗、更简单的操作流程, 且更适应于实际应用需求, 例如高速公路交通控制和快速超像素分割^[27]等场景.

注 2 文献[28]中的定理 1 可保证系统(1)–(4)存在唯一的弱解. 此时由于弱解对应的随机积分不是鞅, 所以不能用 Itô 公式. 针对这一问题, 文献[28]命题 1 提出了基于弱解的无穷小生成元形式.

为了表述方便, 定义块矩阵 $\mathbf{e}_1 = [I_{n \times n}, \mathbf{0}_{n \times n}, \mathbf{0}_{n \times n}]^T$, $\mathbf{e}_2 = [\mathbf{0}_{n \times n}, I_{n \times n}, \mathbf{0}_{n \times n}]^T$, $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{0}_{n \times n}, \mathbf{0}_{n \times n}, I_{n \times n}]^T$. 并给出如下引理和定义.

引理 1 (Wirtinger 不等式^[29]) 对于正定矩阵 $R > \mathbf{0}$, 如果 $y \in \mathcal{H}^1(0, l)$ 是一个向量函数且 $y(0) = \mathbf{0}$ 或 $y(l) = \mathbf{0}$, 则以下积分不等式成立:

$$\int_0^l y^T(\eta) R y(\eta) d\eta \leq \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l \left(\frac{dy}{d\eta} \right)^T R \left(\frac{dy}{d\eta} \right) d\eta.$$

引理 2^[30] 假设 $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ 是具有适当维度的标量矩阵, 如果存在函数 $v(t) \in [0, a]$, 则不等式 $\Omega_1 + v(t)\Omega_2 + (a - v(t))\Omega_3 < \mathbf{0}$ 等价于

$$\begin{cases} \Omega_1 + a\Omega_2 < \mathbf{0}, \\ \Omega_1 + a\Omega_3 < \mathbf{0}. \end{cases}$$

引理 3^[31] 对于给定实数矩阵 D, E, F, G, H , 如果 $G > \mathbf{0}$ 且 $H^T H \leq I$, 则有

① 对于任意常数 $r > 0$ 和向量 $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$2x^T E H F y \leq r x^T E E^T x + \frac{1}{r} y^T F^T F y;$$

② 对于任意常数 $r > 0$, 若 $G - r E E^T > \mathbf{0}$ 成立, 则有

$$(D + E H F)^T G^{-1} (D + E H F) \leq D^T (G - r E E^T)^{-1} D + \frac{1}{r} F^T F.$$

引理 4 (Schur 补引理^[32]) 对于适当维度的矩阵 P, Q, R , 以下条件等价的:

$$\textcircled{1} \begin{pmatrix} P & Q \\ Q^T & R \end{pmatrix} < \mathbf{0};$$

② 若 R 是可逆的, $P - Q R^{-1} Q^T < \mathbf{0}$ 且 $R < \mathbf{0}$;

③ 若 P 是可逆的, $R - Q P^{-1} Q^T < \mathbf{0}$ 且 $P < \mathbf{0}$.

定义 1 如果存在正常数 δ 和 c , 使得

$$E \|z(x, t)\|^2 \leq c e^{-2\delta(t-t_0)} E \|\phi(x, t)\|^2,$$

则称系统(1)是均方指数稳定的. 其中, $\|z\|^2$ 定义为 $\int_0^1 z^T P_1 z dx$, $P_1 > \mathbf{0}$ 是一个非奇异对角矩阵, $\delta > 0$ 是衰减系数.

2 主要定理及其证明

本节利用 BSC 以及 OBBSC 分析 SRDS 的稳定性. 首先, 提出了一种新颖的依赖于采样间隔的分段不连

续 Lyapunov 泛函, 并通过设计适当的 BSC, 得出 SRDS 稳定的充分条件. 接着, 考虑到系统状态信息不完全获得的情况, 提出了一种基于 Luenberger 观测器的 BSC, 以减少对完整状态信息的依赖. 为了稳定基于观测器的增强型 SRDS, 构造一个改进的分段不连续 Lyapunov 泛函, 基于矩阵不等式, 得到了系统稳定的充分条件.

2.1 BSC 的稳定性

针对系统(1)的 BSC, 构造一个与采样间隔相关的分段不连续 Lyapunov 泛函. 通过引入齐次离散变换和不等式技术, 给出系统(1)均方指数稳定的充分条件. 为了说明适当的 BSC 能够镇定不稳定的系统(1), 给出以下定理.

定理 1 对于给定的控制增益 K 和标量 $h > 0, \varepsilon > 0, \delta > 0$, 以及非奇异正对角矩阵 P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2 , 如果存在 $P_1 \neq P_2, hP_1 \leq \varepsilon P_2, h \leq 1/(2\delta)$ 使得不等式

$$\begin{bmatrix} M & hK^T B P_1 Q_2 & hP_1 B K Q_1 \\ -\frac{h\pi^2}{4} (Q_2 P_1 B Q_2)_{\text{sym}} & -hQ_2 P_1 B K Q_1 & \\ * & & -(1 - 2\delta h) P_3 \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{5}$$

和

$$\begin{bmatrix} N & hK^T B P_2 Q_2 & hP_2 B K Q_1 \\ -\frac{h\pi^2}{4} (Q_2 P_2 B Q_2)_{\text{sym}} & -hQ_2 P_2 B K Q_1 & \\ * & & -(1 - 2\delta h) P_3 \end{bmatrix} < \mathbf{0} \tag{6}$$

成立, 则 BSC(4)下的系统(1)是均方指数稳定的. 其中 $M = P_2 - P_1 + h((P_1 A)_{\text{sym}} + C^T P_1 C - (P_1 B K)_{\text{sym}} + 2\delta P_1), N = P_2 - P_1 + h((P_2 A)_{\text{sym}} + C^T P_2 C - (P_2 B K)_{\text{sym}} + 2\delta P_2)$.

证明 可以分为三部分. 首先, 针对离散值使用如下齐次变换:

$$\begin{cases} Q_1 \bar{z}(x, t) = z(x, t) - z(x, t_k), \\ Q_2 \hat{z}(x, t) = z(x, t) - z(1, t), \end{cases} \tag{7}$$

其中, $Q_1, Q_2 > \mathbf{0}$ 是非奇异对角矩阵. 构建依赖于采样间隔的分段不连续 Lyapunov 泛函:

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t),$$

其中

$$V_1(t) = \int_0^1 \eta(t) z^T P_1 z + \theta(t) z^T P_2 z dx, \tag{8}$$

$$V_2(t) = \int_0^1 \int_t^{t+\eta(t)} \bar{z}^T(x, s) P_3 \bar{z}(x, s) ds dx, \tag{9}$$

其中, $\eta(t) = t_{k+1} - t, \theta(t) = t - t_k, t \in [t_k, t_{k+1}), P_1, P_2, P_3 > \mathbf{0}$ 且 $P_1 \neq P_2$ 假设为对角可逆矩阵.

显然 $V(t) > \mathbf{0}$. 由于 $\lim_{t \rightarrow t_k^-} V_1(t) \neq \lim_{t \rightarrow t_k^+} V_1(t), V_1(t)$ 在 $t \in [t_k, t_{k+1})$ 上是一个分段不连续泛函, 其中 $k = 0, 1, 2, \dots$. 注意到当 $t \rightarrow t_k^+$ 且 Q_1 是非奇异矩阵时, $Q_1 \bar{z}(x, t) = \mathbf{0}$, 因此当 $t \rightarrow t_k^+$ 时, 有 $\bar{z}(x, t) = \mathbf{0}$. 并且, 当 $t \rightarrow t_k^-$ 时, $V_2(t) = \mathbf{0}$. 因此, 在采样时间上 $V_2(t)$ 是连续的, 且对于 $k = 0, 1, 2, \dots$, 都有 $V_2(t_k) = \mathbf{0}$.

考虑恒等式

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} V(t) - \lim_{t \rightarrow t_k^+} V(t) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} (V_1(t) + V_2(t)) - V(t_k) = \lim_{t \rightarrow t_k^-} V_1(t) - V_1(t_k)$$

和

$$\lim_{t \rightarrow t_k^-} V_1(t) = \int_0^1 h_{k-1} z^T P_2 z dx, V_1(t_k) = \int_0^1 h_k z^T P_1 z dx.$$

由于约束条件 $hP_1 \leq \varepsilon P_2$, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^1 h_{k-1} (z^T P_2 z - h_k z^T P_1 z) dx &\geq \\ \int_0^1 (\varepsilon z^T P_2 z - h z^T P_1 z) dx &= \int_0^1 z^T (\varepsilon P_2 - h P_1) z dx \geq 0, \end{aligned}$$

这表明

$$\lim_{t \rightarrow t_f^-} V(t) \geq \lim_{t \rightarrow t_f^+} V(t).$$

沿系统(1)的无穷小生成元^[28]定义为

$$LV(z(x,t), t) = V_t(z(x,t), t) + \frac{\partial V(z(x,t), t)}{\partial z(x,t)} U + \frac{1}{2} W^T \frac{\partial^2 V(z(x,t), t)}{\partial z^2(x,t)} W, \quad (10)$$

其中, $U = Az(x,t) + B \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2}$, $W = Cz(x,t)$.

第二部分的目标是得到不等式 $LV(t) \leq -2\delta V(t)$. 为此, 将式(10)应用于式(8)和(9), 可以得到

$$LV_1(t) = \int_0^1 z^T (P_2 - P_1) z + \eta(t) \left((z^T P_1 B z_{xx})_{\text{sym}} + z^T ((P_1 A)_{\text{sym}} + C^T P_1 C) z \right) + \theta(t) \left(z^T ((P_2 A)_{\text{sym}} + C^T P_2 C) z + (z^T P_2 B z_{xx})_{\text{sym}} \right) dx$$

和

$$LV_2(t) = \int_0^1 -\bar{z}^T P_3 \bar{z} dx.$$

由式(3)、(4)、(7)以及 Green 公式可以得到

$$\int_0^1 z_x^T P_1 B z_{xx} dx = z^T(1,t) P_1 B z_x(1,t) - \int_0^1 z_x^T P_1 B z_x dx = \int_0^1 - (z - Q_2 \hat{z})^T P_1 B K (z - Q_1 \bar{z}) - z_x^T P_1 B z_x dx. \quad (11)$$

并且, 既然 $Q_2 \hat{z}(1,t) = \mathbf{0}$, 则利用引理 1, 可以得到

$$\int_0^1 -z_x^T P_1 B z_x dx = \int_0^1 -\hat{z}_x^T Q_2 P_1 B Q_2 \hat{z}_x dx \leq \int_0^1 -\frac{\pi^2}{4} \hat{z}^T Q_2 P_1 B Q_2 \hat{z} dx. \quad (12)$$

上述分析表明

$$\begin{aligned} LV(t) \leq & \int_0^1 z^T (P_2 - P_1) z - \bar{z}^T P_3 \bar{z} + \eta(t) \left(z^T ((P_1 A)_{\text{sym}} + C^T P_1 C - (P_1 B K)_{\text{sym}}) z + \right. \\ & z^T (P_1 B K Q_1)_{\text{sym}} \bar{z} + \hat{z}^T (Q_2 P_1 B K)_{\text{sym}} z - \hat{z}^T (Q_2 P_1 B K Q_1)_{\text{sym}} \bar{z} - \\ & \left. \frac{\pi^2}{4} \hat{z}^T (Q_2 P_1 B Q_2)_{\text{sym}} \hat{z} \right) + \theta(t) \left(z^T ((P_2 A)_{\text{sym}} + C^T P_2 C - (P_2 B K)_{\text{sym}}) z + \right. \\ & z^T (P_2 B K Q_1)_{\text{sym}} \bar{z} + \hat{z}^T (Q_2 P_2 B K)_{\text{sym}} z - \hat{z}^T (Q_2 P_2 B K Q_1)_{\text{sym}} \bar{z} - \\ & \left. \frac{\pi^2}{4} \hat{z}^T (Q_2 P_2 B Q_2)_{\text{sym}} \hat{z} \right) dx. \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= e_1 (P_2 - P_1) e_1^T - e_3 P_3 e_3^T, \\ \Phi_2 &= e_1 ((P_1 A)_{\text{sym}} + C^T P_1 C - (P_1 B K)_{\text{sym}}) e_1^T + e_1 (Q_2 P_1 B K)_{\text{sym}} e_2^T + \\ & e_1 (P_1 B K Q_1)_{\text{sym}} e_3^T - \frac{\pi^2}{4} e_2 (Q_2 P_1 B Q_2)_{\text{sym}} e_2^T - e_2 (Q_2 P_1 B K Q_1)_{\text{sym}} e_3^T, \\ \Phi_3 &= e_1 ((P_2 A)_{\text{sym}} + C^T P_2 C - (P_2 B K)_{\text{sym}}) e_1^T + e_1 (Q_2 P_2 B K)_{\text{sym}} e_2^T + \\ & e_1 (P_2 B K Q_1)_{\text{sym}} e_3^T - \frac{\pi^2}{4} e_2 (Q_2 P_2 B Q_2)_{\text{sym}} e_2^T - e_2 (Q_2 P_2 B K Q_1)_{\text{sym}} e_3^T. \end{aligned}$$

此时, 式(13)可以重写为另一种形式, 即关于 t 的线性函数:

$$LV(t) \leq \int_0^1 \Xi^T (\Phi_1 + \eta(t) \Phi_2 + \theta(t) \Phi_3) \Xi dx,$$

其中, $\Xi = \text{col} \{ z, \hat{z}, \bar{z} \}$.

注意到 $V(t) \leq \int_0^1 \eta(t) z^T P_1 z + \theta(t) z^T P_2 z + h \bar{z}^T P_3 \bar{z} dx$, 可以得到

$$LV(t) + 2\delta V(t) \leq$$

$$\int_0^1 \Xi^T (\Phi_1 + 2\delta h e_3 P_3 e_3^T + \eta(t) (\Phi_2 + 2\delta e_1 P_1 e_1^T) + \theta(t) (\Phi_3 + 2\delta e_1 P_2 e_1^T)) \Xi dx.$$

根据引理 2、条件(5)和(6),可以得到 $LV(t) \leq -2\delta V(t)$ 。

第三部分的目标则是将 Lyapunov 不等式转化为依赖于系统状态的不等式.对不等式 $LV(t) \leq -2\delta V(t)$ 两边使用 Gronwall 不等式进行积分,可以得到

$$EV(t) \leq e^{-2\delta t} V(0).$$

由 $\varepsilon \leq t_{k+1} - t_k = h_k < h$ 和 $hP_1 < \varepsilon P_2$ 可得

$$EV(t) \geq E \int_0^1 \varepsilon z^T P_1 z + \varepsilon z^T P_2 z dx \geq E \int_0^1 (\varepsilon + h) z^T P_1 z dx,$$

以及

$$V(0) \leq \int_0^1 h \phi^T(x) P_1 \phi(x) dx.$$

设 $c = h/(\varepsilon + h)$, 则有 $E \|z(x, t)\|^2 \leq ce^{-2\delta t} E \|\phi(x, t)\|^2$. 根据定义 1, 表明系统(1)在 $t_0 = 0$ 时是均方指数稳定的, 证毕.

从上述分析中, 可以看出 Lyapunov 函数的不连续性体现在 $V_1(t)$ 中. 接下来, 考虑构造连续 Lyapunov 泛函的情况. 基于 $V_1(t)$, 提出一个退化情况 $P_1 = P_2$, 并考虑具有周期性采样的边界采样控制. 换言之, 假设 $t_{k+1} - t_k = h_c$ 对于 $k = 0, 1, 2, \dots$ 均成立, 接着给出如下修正后的连续泛函:

$$\tilde{V}_1(t) = \int_0^1 h_c z^T P_1 z dx.$$

而 $V_2(t)$ 定义同式(9), 则可以直接得出以下推论.

推论 1 如果给定 K 和正标量 h_c, δ 及 Q_1, Q_2, P_1, P_3 满足 $2\delta h_c < 1$, 并且有如下不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \hat{M} & h_c K^T B P_1 Q_2 & h_c P_1 B K Q_1 \\ -\frac{\pi^2}{4} h_c (Q_2 P_1 B Q_2)_{\text{sym}} & -h_c Q_2 P_1 B K Q_1 & \\ * & & -(1 - 2\delta h_c) P_3 \end{bmatrix} < 0, \tag{14}$$

则系统(1)是均方指数稳定的, 其中 $\hat{M} = h_c ((P_1 A)_{\text{sym}} + C^T P_1 C - (P_1 B K)_{\text{sym}} + 2\delta P_1)$ 。

注 3 引入式(7)的目的是利用齐次离散变换方法, 解决控制器带来的时间离散项问题, 便于利用 Lyapunov 泛函分析方法, 构造出有解的二次型方程. 这样设计的优势在于形式上把离散项转化为连续项处理, 再通过不等式技巧, 把混杂系统问题转化为连续系统问题.

注 4 在定理 1 中取 $\varepsilon = h = h_c$ 且 $P_1 = P_2$, 那么如果式(5)和(6)成立, 式(14)也必然成立, 反之亦然, 即周期性采样策略是非周期性采样结果的一个特例. 这表明定理 1 中的结果优于推论 1 中的结果. 分段不连续 Lyapunov 泛函能更好地利用采样信息, 进一步降低结果的保守性.

注 5 在极限条件下, 如果非周期性采样接近周期性采样, 则 $hP_1 \leq \varepsilon P_2$ 很容易满足. 事实上, 本文的结果适用于采样间隔在小范围内波动的情况.

注 6 与文献[9]和[29]不同, 所提方法在齐次变换中加入了自由矩阵 Q_1 和 Q_2 , 进一步降低了方法的保守性.

2.2 OBBSC 的稳定性

上述设计的 BSC 的前提是所有系统状态信息都可以获得. 然而, 实际系统状态大多不能完全获取. 为了使 BSC 正常工作, 本文设计一个观测器来提供状态估计, 并给出了基于观测器的 BSC 稳定的充分条件.

设计如下系统状态观测器:

$$d\tilde{z}(x, t) = \left[A\tilde{z}(x, t) + B \frac{\partial^2 \tilde{z}(x, t)}{\partial x^2} + L(\tilde{z}(1, t) - z(1, t)) \right] dt, \tag{15}$$

初始条件为

$$\tilde{z}(x, 0) = \tilde{\phi}(x), \tag{16}$$

边界条件为

$$\tilde{z}_x(0, t) = 0, \tilde{z}_x(1, t) = u(t), \tag{17}$$

其中, $\tilde{z}(x, t)$ 是 $z(x, t)$ 的估计, L 是待设计的观测器增益矩阵, 控制器为 $u(t) = -K \int_0^1 \tilde{z}(x, t_k) dx$.

定义观测器的估计误差为 $e(x, t) = z(x, t) - \tilde{z}(x, t)$. 令 $Z(x, t) = (e(x, t), z(x, t))^T \in \mathbb{R}^{2n}$, 容易得到

$$dZ(x, t) = \left[\mathcal{A}Z(x, t) + \mathcal{B} \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2} + \mathcal{L}Z(1, t) \right] dt + \mathcal{C}Z(x, t) dW(t), \tag{18}$$

其中, $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & A \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ * & B \end{pmatrix}$, $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$, $\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & C \end{pmatrix}$. 相应的初始条件和边界条件表示为

$$Z(x, 0) = \bar{\Phi}(x) \tag{19}$$

和

$$Z_x(0, t) = 0_{2n}, Z_x(1, t) = (0_{n \times n}, I_{n \times n})^T u(t), \tag{20}$$

其中, $\bar{\Phi}(x) = (\bar{\phi}(x), \phi(x))^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

下面基于观测器设计 BSC, 并转化成矩阵不等式的形式.

定理 2 给定矩阵 \mathcal{K} , \mathcal{L} 和正标量 h, ε, δ 以及非奇异对角矩阵 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$ 并满足 $\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2$, $h\mathcal{P}_1 \leq \varepsilon\mathcal{P}_2, h \leq 1/(2\delta)$, 使得以下条件成立, 则观测器误差系统(18)–(20)是均方指数稳定的:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M} & h(\mathcal{K}^T \mathcal{B} \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_1 \mathcal{L}) \mathcal{Q}_2 & h \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1 \\ -\frac{h\pi^2}{4} (\mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{Q}_2)_{\text{sym}} & -h \mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1 & \\ * & & -(1 - 2\delta h) \mathcal{P}_3 \end{bmatrix} < 0 \tag{21}$$

和

$$\begin{bmatrix} \mathcal{N} & h(\mathcal{K}^T \mathcal{B} \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_2 \mathcal{L}) \mathcal{Q}_2 & h \mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1 \\ -\frac{h\pi^2}{4} (\mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{Q}_2)_{\text{sym}} & -h \mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1 & \\ * & & -(1 - 2\delta h) \mathcal{P}_3 \end{bmatrix} < 0, \tag{22}$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1 + h((\mathcal{P}_1 \mathcal{A})_{\text{sym}} + \mathcal{C}^T \mathcal{P}_1 \mathcal{C} - (\mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K})_{\text{sym}} + (\mathcal{P}_1 \mathcal{L})_{\text{sym}} + 2\delta \mathcal{P}_1), \\ \mathcal{N} &= \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1 + h((\mathcal{P}_2 \mathcal{A})_{\text{sym}} + \mathcal{C}^T \mathcal{P}_2 \mathcal{C} - (\mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{K})_{\text{sym}} + (\mathcal{P}_2 \mathcal{L})_{\text{sym}} + 2\delta \mathcal{P}_2). \end{aligned}$$

证明 令

$$\begin{cases} \mathcal{Q}_1 \bar{Z}(x, t) = Z(x, t) - Z(x, t_k), \\ \mathcal{Q}_2 \hat{Z}(x, t) = Z(x, t) - Z(1, t). \end{cases} \tag{23}$$

其中, $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2 > 0$ 是对角正矩阵, 并且 $\mathcal{Q}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_1 & 0 \\ * & \mathcal{Q}_1 \end{pmatrix}, \mathcal{Q}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{Q}_2 & 0 \\ * & \mathcal{Q}_2 \end{pmatrix}$.

构造相应的增广型 Lyapunov 泛函 $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_1(t) + \mathcal{V}_2(t)$, 其中

$$\mathcal{V}_1(t) = \int_0^1 \eta(t) Z^T \mathcal{P}_1 Z + \theta(t) Z^T \mathcal{P}_2 Z dx, \tag{24}$$

$$\mathcal{V}_2(t) = \int_0^1 \int_t^{t+\eta(t)} \bar{Z}^T(x, s) \mathcal{P}_3 \bar{Z}(x, s) ds dx, \tag{25}$$

其中, $\eta(t), \theta(t)$ 定义与前文一致, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3 > 0$ 均为对角可逆矩阵, 并且

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ * & P_1 \end{pmatrix}, \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ * & P_2 \end{pmatrix}, \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} P_3 & 0 \\ * & P_3 \end{pmatrix}.$$

则无穷小生成元为

$$\begin{aligned} L\mathcal{V}(t) &= \\ & \int_0^1 Z^T (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1) Z - \bar{Z}^T \mathcal{P}_3 \bar{Z} + \eta(t) (Z^T ((\mathcal{P}_1 \mathcal{A})_{\text{sym}} + \mathcal{C}^T \mathcal{P}_1 \mathcal{C}) Z + (Z^T \mathcal{P}_1 \mathcal{L} Z(1, t))_{\text{sym}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{Z}^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathbf{Z}_{xx})_{\text{sym}}) + \theta(t) (\mathbf{Z}^T ((\mathcal{P}_2 \mathcal{A})_{\text{sym}} + \mathcal{C}^T \mathcal{P}_2 \mathcal{C}) \mathbf{Z} + (\mathbf{Z}^T \mathcal{P}_1 \mathcal{L} \mathbf{Z}(1, t))_{\text{sym}} + \\ & (\mathbf{Z}^T \mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathbf{Z}_{xx})_{\text{sym}}) dx. \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \mathbf{Z}^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathbf{Z}_{xx} dx = \\ & \mathbf{Z}^T(1, t) \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathbf{Z}_x(1, t) - \int_0^1 \mathbf{Z}_x^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathbf{Z}_x dx = \\ & \int_0^1 -(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2 \hat{\mathbf{Z}})^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} (\mathbf{0}_{n \times n}, \mathbf{I}_{n \times n})^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{z}}(x, t_k) - \mathbf{Z}_x^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathbf{Z}_x dx = \\ & \int_0^1 -(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2 \hat{\mathbf{Z}})^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} (\mathbf{0}_{n \times n}, \mathbf{I}_{n \times n})^T \mathbf{K} (\mathbf{z}(x, t_k) - \mathbf{e}(x, t_k)) - \mathbf{Z}_x^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathbf{Z}_x dx = \\ & \int_0^1 -(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2 \hat{\mathbf{Z}})^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} (\mathbf{0}_{n \times n}, \mathbf{I}_{n \times n})^T \mathbf{K} (-\mathbf{I}_{n \times n}, \mathbf{I}_{n \times n}) \mathbf{Z}(x, t_k) - \mathbf{Z}_x^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathbf{Z}_x dx = \\ & \int_0^1 -(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2 \hat{\mathbf{Z}})^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K} (\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_1 \bar{\mathbf{Z}}) - \mathbf{Z}_x^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathbf{Z}_x dx \leq \\ & \int_0^1 -(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2 \hat{\mathbf{Z}})^T \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K} (\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_1 \bar{\mathbf{Z}}) - \frac{\pi^2}{4} \hat{\mathbf{Z}}^T \mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{Q}_2 \hat{\mathbf{Z}} dx, \end{aligned} \tag{26}$$

其中, $\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{K} & \mathbf{K} \end{pmatrix}$.

可以得到

$$\begin{aligned} & L\mathcal{V}(t) \leq \\ & \int_0^1 \left\{ \mathbf{Z}^T (\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1) \mathbf{Z} - \bar{\mathbf{Z}}^T \mathcal{P}_3 \bar{\mathbf{Z}} + \eta(t) \left[\mathbf{Z}^T (\mathcal{C}^T \mathcal{P}_1 \mathcal{C} + (\mathcal{P}_1 \mathcal{A})_{\text{sym}} - (\mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K})_{\text{sym}} + \right. \right. \\ & (\mathcal{P}_1 \mathcal{L})_{\text{sym}}) \mathbf{Z} + \mathbf{Z}^T (\mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1)_{\text{sym}} \bar{\mathbf{Z}} + \hat{\mathbf{Z}}^T (\mathcal{Q}_2 (\mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K} - \mathcal{L} \mathcal{P}_1))_{\text{sym}} \mathbf{Z} - \\ & \left. \hat{\mathbf{Z}}^T (\mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1)_{\text{sym}} \bar{\mathbf{Z}} - \frac{\pi^2}{4} \hat{\mathbf{Z}}^T (\mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{Q}_2)_{\text{sym}} \hat{\mathbf{Z}} \right] + \\ & \theta(t) \left[\mathbf{Z}^T ((\mathcal{P}_2 \mathcal{A})_{\text{sym}} + \mathcal{C}^T \mathcal{P}_2 \mathcal{C} - (\mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{K})_{\text{sym}} + (\mathcal{P}_2 \mathcal{L})_{\text{sym}}) \mathbf{Z} + \right. \\ & \left. \mathbf{Z}^T (\mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1)_{\text{sym}} \bar{\mathbf{Z}} + \hat{\mathbf{Z}}^T (\mathcal{Q}_2 (\mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{K} - \mathcal{L} \mathcal{P}_2))_{\text{sym}} \mathbf{Z} - \right. \\ & \left. \hat{\mathbf{Z}}^T (\mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1)_{\text{sym}} \bar{\mathbf{Z}} - \frac{\pi^2}{4} \hat{\mathbf{Z}}^T (\mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{Q}_2)_{\text{sym}} \hat{\mathbf{Z}} \right] \Big\} dx. \end{aligned} \tag{27}$$

将式(27)重写为如下形式:

$$L\mathcal{V}(t) \leq \int_0^1 \boldsymbol{\Psi}^T (\boldsymbol{\Phi}_1 + \eta(t) \boldsymbol{\Phi}_2 + \theta(t) \boldsymbol{\Phi}_3) \boldsymbol{\Psi} dx,$$

其中, $\boldsymbol{\Psi} = \text{col} \{ \mathbf{Z}, \hat{\mathbf{Z}}, \bar{\mathbf{Z}} \}$, 其余部分与定理 1 的过程类似, 不再赘述, 证毕.

注 7 从定理 1 和定理 2 的结果可以看出, 系统的稳定性分析和观测器设计可以分别进行, 因此, 可以根据实际情况分别采用.

注 8 使用反步法 (back-stepping) 需要依赖于参数的状态转换, 这使得在参数不确定时容易失败. 相反, 本文的方法关注的是 Lyapunov 分析, 它不依赖于任何转换, 因此非常适合考虑以下参数不确定性的情况.

3 鲁棒镇定性

在实际应用中, 参数干扰、未知输入等不确定性总是存在的. 研究鲁棒镇定性是处理不确定系统的一种必然需求.

3.1 BSC 的鲁棒镇定性

考虑如下参数含有不确定性的 SRDS:

$$dz(x,t) = \left[(A + \Theta(x,t))z(x,t) + (B + \chi(x,t)) \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right] dt + (C + \Xi(x,t))z(x,t)dW(t), \quad (28)$$

其中, $\Theta(x,t), \chi(x,t), \Xi(x,t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 表示不确定矩阵, 初始条件和边界条件见式(2)—(4).

以下是对不确定矩阵的一个必要假设.

假设 1 假设不确定矩阵 $\Theta(x,t), \chi(x,t)$ 和 $\Xi(x,t)$ 可以写为

$$[\Theta(x,t), \chi(x,t), \Xi(x,t)] = \mathbf{D}\mathbf{A}(x,t)[\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}],$$

其中, $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ 是已知的实矩阵, $\mathbf{A}(x,t)$ 是关于时空变量的未知矩阵, 并且对于任意 $x \in [0, 1], t \in [0, \infty)$ 均满足 $\mathbf{A}^T(x,t)\mathbf{A}(x,t) \leq \mathbf{I}$.

以下是关于 SRDS 的鲁棒均方指数稳定的定义.

定义 2 如果系统(28)对于满足假设 1 的任何不确定参数 $\Theta(x,t), \chi(x,t)$ 和 $\Xi(x,t)$ 都是均方指数稳定的, 那么它被称为鲁棒均方指数稳定的.

以下定理为采用 BSC 实现系统(28)的鲁棒均方指数稳定提供了一个可行的方案.

定理 3 在假设 1 下, 如果对于给定的控制增益 \mathbf{K} , 正标量 $h, \varepsilon, \delta, r_1, r_2, r_3, r_4$ 以及非奇异的正对角矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2$, 满足条件 $\mathbf{P}_1 \neq \mathbf{P}_2$ 和式(29)—(33), 则系统(28)在边界采样控制(4)下是鲁棒均方指数稳定的:

$$h\mathbf{P}_1 < \varepsilon\mathbf{P}_2, h \leq \frac{1}{2\delta}, \mathbf{P}_1^{-1} > r_2\mathbf{D}\mathbf{D}^T, \mathbf{P}_1^{-2} > r_2\mathbf{D}\mathbf{D}^T, \quad (29)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mathbf{P}_1\mathbf{P} - \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{P}_1 & \frac{1}{\sqrt{r_4}}\mathbf{F}^T & \sqrt{r_4}\mathbf{P}_1\mathbf{D} \\ & -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ * & & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (30)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mathbf{P}_2\mathbf{B} - \frac{1}{2}\mathbf{B}\mathbf{P}_2 & \frac{1}{\sqrt{r_4}}\mathbf{F}^T & \sqrt{r_4}\mathbf{P}_2\mathbf{D} \\ & -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ * & & -\mathbf{I}_n \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (31)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{11} & \mathbf{\Gamma}_{12} & \mathbf{\Gamma}_{13} \\ & \mathbf{\Gamma}_{22} & \mathbf{\Gamma}_{23} \\ * & & \mathbf{\Gamma}_{33} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (32)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{\Gamma}}_{11} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{12} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{13} \\ & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{22} & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{23} \\ * & & \hat{\mathbf{\Gamma}}_{33} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \quad (33)$$

其中

$$\mathbf{\Gamma}_{11} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Omega}_{11} & \mathbf{P}_1\mathbf{D} & \mathbf{G}^T & \mathbf{E}^T & \mathbf{K}^T\mathbf{F}^T & \mathbf{C}^T \\ & \mathbf{\Omega}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & -\frac{r_2}{h}\mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & -\frac{r_1}{h}\mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & -\frac{r_3}{h}\mathbf{I}_n & \mathbf{0} \\ * & & & & & \mathbf{\Omega}_{55} \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_{12} = h((Q_2 P_1 B K)^T - r_3 P_1 D D^T P_1 Q_2), \Gamma_{13} = h\left(P_1 B K Q_1 - \frac{1}{r_3} K^T F^T F K Q_1\right),$$

$$\Gamma_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{h\pi^2}{8}(Q_2 P_1 B Q_2)_{\text{sym}} & Q_2 P_1 D \\ * & -\frac{1}{hr_3} I_n \end{bmatrix}, \Gamma_{23} = -h Q_2 P_1 B K Q_1,$$

$$\Gamma_{33} = \hat{\Gamma}_{33} = \begin{bmatrix} -(1 - 2\delta h) P_3 & Q_1 K^T F^T \\ * & -\frac{r_3}{h} I_n \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Gamma}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & P_2 D & G^T & E^T & K^T F^T & C^T \\ & \tilde{\Omega}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & -\frac{r_2}{h} I_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & -\frac{r_1}{h} I_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & -\frac{r_3}{h} I_n & \mathbf{0} \\ * & & & & & \tilde{\Omega}_{66} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\Gamma}_{12} = h(Q_2 P_2 B K - r_3 P_2 D D^T P_2 Q_2), \hat{\Gamma}_{13} = h\left(P_2 B K Q_1 - \frac{1}{r_3} K^T F^T F K Q_1\right),$$

$$\hat{\Gamma}_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{h\pi^2}{8}(Q_2 P_2 B Q_2)_{\text{sym}} & Q_2 P_2 D \\ * & -\frac{1}{hr_3} I_n \end{bmatrix}, \hat{\Gamma}_{23} = -h Q_2 P_2 B K Q_1,$$

$$\Omega_{11} = P_2 - P_1 + h(P_1 A - P_1 B K)_{\text{sym}} + 2\delta h P_1, \Omega_{22} = -\frac{1}{h(r_1 + r_3)} I_n, \Omega_{55} = -\frac{1}{h}(P_1^{-1} - r_2 D D^T),$$

$$\tilde{\Omega}_{11} = P_2 - P_1 + h(P_2 A - P_2 B K)_{\text{sym}} + 2\delta h P_2, \tilde{\Omega}_{22} = -\frac{1}{h(r_1 + r_3)} I_n, \tilde{\Omega}_{66} = -\frac{1}{h}(P_2^{-1} - r_2 D D^T).$$

证明 基于定理 1 的证明, 将式(10)应用于系统(28), 可以得到

$$\begin{aligned} LV(t) = & \int_0^1 \{z^T(P_2 - P_1)z - \bar{z}^T P_3 \bar{z} + \eta(t)[z^T((P_1(A + \Theta(x, t)))_{\text{sym}} + \\ & (C + \Xi(x, t))^T P_1(C + \Xi(x, t)))z + (z^T P_1(B + \chi(x, t))z_{xx})_{\text{sym}}] + \\ & \theta(t)[z^T((P_2(A + \Theta(x, t)))_{\text{sym}} + (C + \Xi(x, t))^T P_2(C + \Xi(x, t)))z + \\ & (z^T P_2(B + \chi(x, t))z_{xx})_{\text{sym}}]\} dx. \end{aligned} \tag{34}$$

根据引理 3 和假设 1, 对于任意正数 r_1, r_2 , 有

$$\int_0^1 z^T P_1(A + \Theta(x, t))z dx \leq \int_0^1 \left(z^T P_1 A z + \frac{r_1}{2} z^T P_1 D D^T P_1 z + \frac{1}{2r_1} z^T E^T E z\right) dx \tag{35}$$

和

$$\int_0^1 z^T(C + \Xi(x, t))^T P_1(C + \Xi(x, t))z dx \leq \int_0^1 z^T \left(C^T(P_1^{-1} - r_2 D D^T)^{-1} C + \frac{1}{r_2} G^T G\right) z dx. \tag{36}$$

基于之前的分析, 已经证明了

$$\int_0^1 z^T P_1 B z_{xx} dx \leq$$

$$\int_0^1 \left(- (z - Q_2 \hat{z})^T P_1 B K (z - Q_1 \bar{z}) - \frac{1}{2} z_x^T P_1 B z_x - \frac{\pi^2}{8} \hat{z}^T Q_2 P_1 B Q_2 \hat{z} \right) dx. \quad (37)$$

根据引理4,并结合式(3)、(4)和(7),对于标量 $r_3, r_4 > 0$,可以得到

$$\begin{aligned} & \int_0^1 z^T P_1 \chi(x, t) z_{xx} dx = \\ & \int_0^1 z^T P_1 D \Lambda(x, t) F z_{xx} dx = \\ & z^T(1, t) P_1 D \Lambda(x, t) F z_x(1, t) - \int_0^1 z_x^T P_1 D \Lambda(x, t) F z_x dx = \\ & - \int_0^1 (z - Q_2 \hat{z})^T P_1 D \Lambda(x, t) F K (z - Q_1 \bar{z}) dx - \int_0^1 z_x^T P_1 D \Lambda(x, t) F z_x dx \leq \\ & \int_0^1 \left(\frac{r_3}{2} (z - Q_2 \hat{z})^T P_1 D D^T P_1^T (z - Q_2 \hat{z}) + \frac{1}{2r_3} (z - Q_1 \bar{z})^T K^T F^T F K (z - Q_1 \bar{z}) + \right. \\ & \left. \frac{r_4}{2} z_x^T P_1 D D^T P_1^T z_x + \frac{1}{2r_4} z_x^T F^T F z_x \right) dx. \end{aligned} \quad (38)$$

将式(35)–(38)代入式(34),并考虑到式(30)和(31),容易得到

$$\begin{aligned} LV(t) \leq & \int_0^1 \left(z^T (P_2 - P_1) z - \bar{z}^T P_3 \bar{z} + \eta(t) \left(z^T ((P_1 A)_{\text{sym}} + C^T (P_1^{-1} - r_2 D D^T)^{-1} C + \right. \right. \\ & r_1 P_1 D D^T P_1^T + \frac{1}{r_2} G^T G + \frac{1}{r_1} E^T E \left. \right) z - \frac{\pi^2}{8} \hat{z}^T (Q_2 P_1 B Q_2)_{\text{sym}} \hat{z} - \\ & ((z - Q_2 \hat{z})^T P_1 B K (z - Q_1 \bar{z}))_{\text{sym}} + r_3 (z - Q_2 \hat{z})^T P_1 D D^T P_1^T (z - Q_2 \hat{z}) + \\ & \frac{1}{r_3} (z - Q_1 \bar{z})^T K^T F^T F K (z - Q_1 \bar{z}) + z_x^T \left(r_4 P_1 D D^T P_1^T + \frac{1}{r_4} F^T F - \right. \\ & \left. \frac{1}{2} P_1 B - \frac{1}{2} B P_1 \right) z_x \left. \right) + \theta(t) \left(z^T \left((P_2 A)_{\text{sym}} + C^T (P_2^{-1} - r_2 D D^T)^{-1} C + \right. \right. \\ & r_1 P_2 D D^T P_2^T + \frac{1}{r_2} G^T G + \frac{1}{r_1} E^T E \left. \right) z - \frac{\pi^2}{8} \hat{z}^T (Q_2 P_2 B Q_2)_{\text{sym}} \hat{z} - \\ & ((z - Q_2 \hat{z})^T P_2 B K (z - Q_1 \bar{z}))_{\text{sym}} + r_3 (z - Q_2 \hat{z})^T P_2 D D^T P_2^T (z - Q_2 \hat{z}) + \\ & \frac{1}{r_3} (z - Q_1 \bar{z})^T K^T F^T F K (z - Q_1 \bar{z}) + \\ & z_x^T \left(r_4 P_2 D D^T P_2^T + \frac{1}{r_4} F^T F - \frac{1}{2} P_2 B - \frac{1}{2} B P_2 \right) z_x \left. \right) dx \leq \\ & \int_0^1 \Xi^T (\Psi_1 + \eta(t) \Psi_2 + \theta(t) \Psi_3) \Xi dx, \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= e_1 (P_2 - P_1) e_1^T - e_3 P_3 e_3^T, \\ \Psi_2 &= e_1 \left[(P_1 A)_{\text{sym}} + C^T (P_1^{-1} - r_2 D D^T)^{-1} C + r_1 P_1 D D^T P_1^T + \frac{1}{r_2} G^T G + \frac{1}{r_1} E^T E - \right. \\ & (P_1 B K)_{\text{sym}} + r_3 P_1 D D^T P_1^T + \frac{1}{r_3} K^T F^T F K \left. \right] e_1^T + \\ & e_1 \left[(Q_2 P_1 B K)_{\text{sym}} - 2r_3 P_1 D D^T P_1 Q_2 \right] e_2^T + \\ & e_1 \left[(P_1 B K Q_1)_{\text{sym}} - \frac{2}{r_3} K^T F^T F K Q_1 \right] e_3^T - \\ & e_2 (Q_2 P_1 B K Q_1)_{\text{sym}} e_3^T + e_2 \left[r_3 Q_2 P_1 D D^T P_1 Q_2 - \frac{\pi^2}{8} (Q_2 P_1 B Q_2)_{\text{sym}} \right] e_2^T + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e_3 \left(\frac{1}{r_3} Q_1 K^T F^T F K Q_1 \right) e_3^T, \tag{40} \\
 \Psi_3 = e_1 & \left[(P_2 A)_{\text{sym}} + C^T (P_2^{-1} - r_2 D D^T)^{-1} C + r_1 P_2 D D^T P_2^T + \frac{1}{r_2} G^T G + \frac{1}{r_1} E^T E - \right. \\
 & (P_2 B K)_{\text{sym}} + r_3 P_2 D D^T P_2^T + \left. \frac{1}{r_3} K^T F^T F K \right] e_1^T + \\
 & e_1 \left[(Q_2 P_2 B K)_{\text{sym}} - 2r_3 P_2 D D^T P_2 Q_2 \right] e_2^T + e_1 \left[(P_2 B K Q_1)_{\text{sym}} - \frac{2}{r_3} K^T F^T F K Q_1 \right] e_3^T - \\
 & e_2 (Q_2 P_2 B K Q_1)_{\text{sym}} e_3^T + \frac{\pi^2}{8} e_2 [r_3 Q_2 P_2 D D^T P_2 Q_2 (Q_2 P_2 B Q_2)_{\text{sym}}] e_2^T + \\
 & e_3 \left(\frac{1}{r_3} Q_1 K^T F^T F K Q_1 \right) e_3^T. \tag{41}
 \end{aligned}$$

引理 2 表明, 如果式 (32) 和 (33) 成立, 可以直接推导出

$$\begin{aligned}
 & LV(t) + 2\delta V(t) \leq \\
 & \int_0^1 \Xi^T [\Psi_1 + 2\delta h e_3 P_3 e_3^T + \eta(t) (\Psi_2 + 2\delta e_1 P_1 e_1^T) + \theta(t) (\Psi_3 + 2\delta e_1 P_2 e_1^T)] \Xi dx < 0. \tag{42}
 \end{aligned}$$

余下证明与定理 1 的证明类似, 证毕.

3.2 基于观测器的边界采样控制的鲁棒稳定性

基于式 (28), 提出以下观测器:

$$d\tilde{z}(x, t) = \left[A\tilde{z}(x, t) + B \frac{\partial^2 \tilde{z}(x, t)}{\partial x^2} + L(\tilde{z}(1, t) - z(1, t)) \right] dt, \tag{43}$$

其满足

$$\tilde{z}(x, 0) = \tilde{\phi}(x) \tag{43}$$

和边界条件

$$\tilde{z}_x(0, t) = 0, \tilde{z}_x(1, t) = u(t), \tag{45}$$

其中, $\tilde{z}(x, t)$ 是 $z(x, t)$ 的估计, L 为观测器增益矩阵, $u(t) = -K \int_0^1 \tilde{z}(x, t_k) dx$.

定义观测器估计误差为 $e(x, t) = z(x, t) - \tilde{z}(x, t)$. 设 $Z(x, t) = (e(x, t), z(x, t))^T \in \mathbb{R}^{2n}$, 可以得到

$$dZ(x, t) = \left[\bar{\mathcal{A}}Z(x, t) + \bar{\mathcal{B}} \frac{\partial^2 Z(x, t)}{\partial x^2} + \bar{\mathcal{L}}Z(1, t) \right] dt + \bar{\mathcal{C}}Z(x, t) dW(t), \tag{46}$$

其中 $\bar{\mathcal{A}} = \mathcal{A} + \mathcal{E}$, $\bar{\mathcal{B}} = \mathcal{B} + \mathcal{F}$, $\bar{\mathcal{L}} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{\mathcal{C}} = \mathcal{C} + \mathcal{G}$, 以及 $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & A \end{pmatrix}$, $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & \Theta(x, t) \\ 0 & \Theta(x, t) \end{pmatrix}$, $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ * & B \end{pmatrix}$,

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & \chi(x, t) \\ 0 & \chi(x, t) \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & C \\ 0 & C \end{pmatrix}, \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 0 & \Xi(x, t) \\ 0 & \Xi(x, t) \end{pmatrix}.$$

对应的初始和边界条件为

$$Z(x, 0) = \bar{\Phi}(x), \tag{47}$$

$$Z_x(0, t) = 0_{2n}, Z_x(1, t) = (0_{n \times n}, I_{n \times n})^T u(t), \tag{48}$$

其中, $\bar{\Phi}(x) = (\tilde{\phi}(x), \phi(x))^T \in \mathbb{R}^{2n}$.

假设 2 假设不确定矩阵 $\mathcal{E}(x, t)$, $\mathcal{F}(x, t)$ 和 $\mathcal{G}(x, t)$ 可以写为 $[\mathcal{E}(x, t), \mathcal{F}(x, t), \mathcal{G}(x, t)] = \bar{\mathcal{D}} \hat{\Lambda}(x, t) [\bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}}]$, 其中 $\bar{\mathcal{D}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{F}}, \bar{\mathcal{G}} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 是已知实数矩阵, $\hat{\Lambda}(x, t) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ 是关于时空变量的未知矩阵, 并对于任意的 $x \in [0, 1]$, $t \in [0, \infty)$, 满足 $\hat{\Lambda}^T(x, t) \hat{\Lambda}(x, t) \leq I_{2n \times 2n}$.

定理 4 在假设 2 下, 如果给定控制增益 \mathcal{K}, \mathcal{L} , 标量 $h > 0, \varepsilon > 0, \delta > 0, r_1, r_2, r_3, r_4$ 和非奇异正对角矩阵 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3, \mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2$, 满足以下条件 (49) — (52), 则系统 (46) — (48) 在 BSC (45) 下是鲁棒均方指数稳定的:

$$\mathcal{P}_1 \neq \mathcal{P}_2, h\mathcal{P}_1 < \varepsilon\mathcal{P}_2, h \leq \frac{1}{2\delta}, \mathcal{P}_1^{-1} > r_2 \mathcal{D}\mathcal{D}^T, \mathcal{P}_1^{-2} > r_2 \mathcal{D}\mathcal{D}^T, \tag{49}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathcal{P}_1 \bar{\mathcal{B}} - \frac{1}{2} \bar{\mathcal{B}} \mathcal{P}_1 & \frac{1}{\sqrt{r_4}} \bar{\mathcal{F}}^T & \sqrt{r_4} \mathcal{P}_1 \bar{\mathcal{D}} \\ & -I_{2n \times 2n} & \mathbf{0} \\ * & & -I_{2n \times 2n} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{50}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathcal{P}_2 \bar{\mathcal{B}} - \frac{1}{2} \bar{\mathcal{B}} \mathcal{P}_2 & \frac{1}{\sqrt{r_4}} \bar{\mathcal{F}}^T & \sqrt{r_4} \mathcal{P}_2 \bar{\mathcal{D}} \\ & -I_{2n \times 2n} & \mathbf{0} \\ * & & -I_{2n \times 2n} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{51}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{\Gamma}_{11} & \bar{\Gamma}_{12} & \bar{\Gamma}_{13} \\ & \bar{\Gamma}_{22} & \bar{\Gamma}_{23} \\ * & & \bar{\Gamma}_{33} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \begin{bmatrix} \tilde{\Gamma}_{11} & \tilde{\Gamma}_{12} & \tilde{\Gamma}_{13} \\ & \tilde{\Gamma}_{22} & \tilde{\Gamma}_{23} \\ * & & \tilde{\Gamma}_{33} \end{bmatrix} < \mathbf{0}, \tag{52}$$

其中

$$\bar{\Gamma}_{11} = \begin{bmatrix} \bar{\Omega}_{11} & \mathcal{P}_1 \bar{\mathcal{D}} & \bar{\mathcal{G}}^T & \bar{\varepsilon}^T & \mathcal{K}^T \bar{\mathcal{F}}^T & \bar{c}^T \\ & \bar{\Omega}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \bar{\Omega}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \bar{\Omega}_{44} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \bar{\Omega}_{55} & \mathbf{0} \\ * & & & & & \bar{\Omega}_{66} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Gamma}_{12} = h((\mathcal{K}^T \mathcal{B} \mathcal{P}_1 \mathcal{Q}_2 - \mathcal{P}_1 \mathcal{L} \mathcal{Q}_2) - r_3 \mathcal{P}_1 \bar{\mathcal{D}} \bar{\mathcal{D}}^T \mathcal{P}_1 \mathcal{Q}_2),$$

$$\bar{\Gamma}_{13} = h\left(\mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1 - \frac{1}{r_3} \mathcal{K}^T \bar{\mathcal{F}}^T \bar{\mathcal{F}} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1\right),$$

$$\bar{\Gamma}_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{h\pi^2}{8} (\mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{Q}_2)_{\text{sym}} & \mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_1 \bar{\mathcal{D}} \\ * & -\frac{1}{hr_3} I_{2n \times 2n} \end{bmatrix}, \bar{\Gamma}_{23} = -h \mathcal{Q}_2 \mathcal{P}_1 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1,$$

$$\bar{\Gamma}_{33} = \tilde{\Gamma}_{33} = \begin{bmatrix} -(1 - 2\delta h) \mathcal{P}_3 & \mathcal{Q}_1 \mathcal{K}^T \bar{\mathcal{F}}^T \\ * & -\frac{r_3}{h} I_{2n \times 2n} \end{bmatrix}, \tilde{\Gamma}_{11} = \begin{bmatrix} \tilde{\Omega} & \mathcal{P}_2 \bar{\mathcal{D}} & \bar{\mathcal{G}}^T & \bar{\varepsilon}^T & \mathcal{K}^{-T} \bar{\mathcal{F}}^T & \bar{c}^T \\ & \tilde{\Omega}_{22} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & \tilde{\Omega}_{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & \tilde{\Omega}_{44} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & & & & \tilde{\Omega}_{55} & \mathbf{0} \\ * & & & & & \tilde{\Omega}_{66} \end{bmatrix},$$

$$\tilde{\Gamma}_{12} = h((\mathcal{K}^T \mathcal{B} \mathcal{P}_2 \mathcal{Q}_2 - \mathcal{P}_2 \mathcal{L} \mathcal{Q}_2) - r_3 \mathcal{P}_2 \bar{\mathcal{D}} \bar{\mathcal{D}}^T \mathcal{P}_2 \mathcal{Q}_2),$$

$$\tilde{\Gamma}_{13} = h\left(\mathcal{P}_2 \mathcal{B} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1 - \frac{1}{r_3} \mathcal{K}^T \bar{\mathcal{F}}^T \bar{\mathcal{F}} \mathcal{K} \mathcal{Q}_1\right),$$

$$\tilde{\Gamma}_{22} = \begin{bmatrix} -\frac{h\pi^2}{8}(\mathcal{Q}_2\mathcal{P}_2\mathcal{B}\mathcal{Q}_2)_{\text{sym}} & \mathcal{Q}_2\mathcal{P}_2\bar{\mathcal{D}} \\ * & -\frac{1}{hr_3}I_{2n \times 2n} \end{bmatrix}, \tilde{\Gamma}_{23} = -h\mathcal{Q}_2\mathcal{P}_2\mathcal{B}\mathcal{K}\mathcal{Q}_1,$$

$$\bar{\mathcal{Q}}_{11} = \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1 + h(\mathcal{P}_1\mathcal{A} - \mathcal{P}_1\mathcal{B}\mathcal{K} + \mathcal{P}_1\mathcal{L})_{\text{sym}} + 2\delta h\mathcal{P}_1, \bar{\mathcal{Q}}_{22} = -\frac{1}{h(r_1 + r_3)}I_{2n \times 2n},$$

$$\bar{\mathcal{Q}}_{33} = -\frac{r_2}{h}I_{2n \times 2n}, \bar{\mathcal{Q}}_{44} = -\frac{r_1}{h}I_{2n \times 2n}, \bar{\mathcal{Q}}_{55} = -\frac{r_3}{h}I_{2n \times 2n}, \bar{\mathcal{Q}}_{66} = -\frac{1}{h}(\mathcal{P}_1^{-1} - r_2\bar{\mathcal{D}}^T),$$

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1 + h(\mathcal{P}_2\mathcal{A} - \mathcal{P}_2\mathcal{B}\mathcal{K} + \mathcal{P}_2\mathcal{L})_{\text{sym}} + 2\delta h\mathcal{P}_2, \tilde{\mathcal{Q}}_{66} = -\frac{1}{h}(\mathcal{P}_2^{-1} - r_2\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}^T).$$

证明 采用相同的 Lyapunov 泛函, 则微分算子如下:

$$L\mathcal{V}(t) = \int_0^1 \mathbf{Z}^T(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1)\mathbf{Z} - \bar{\mathbf{Z}}^T\mathcal{P}_3\bar{\mathbf{Z}} + \eta(t)(\mathbf{Z}^T((\mathcal{P}_1\mathcal{A})_{\text{sym}} + \bar{\mathcal{C}}^T\mathcal{P}_1\bar{\mathcal{C}})\mathbf{Z} + (\mathbf{Z}^T\mathcal{P}_1\mathcal{L}\mathbf{Z}(1,t))_{\text{sym}} + (\mathbf{Z}^T\mathcal{P}_1\bar{\mathcal{B}}\mathbf{Z}_{xx})_{\text{sym}}) + \theta(t)(\mathbf{Z}^T((\mathcal{P}_2\mathcal{A})_{\text{sym}} + \bar{\mathcal{C}}^T\mathcal{P}_2\bar{\mathcal{C}})\mathbf{Z} + (\mathbf{Z}^T\mathcal{P}_1\mathcal{L}\mathbf{Z}(1,t))_{\text{sym}} + (\mathbf{Z}^T\mathcal{P}_2\bar{\mathcal{B}}\mathbf{Z}_{xx})_{\text{sym}})dx.$$

使用与式(35)–(38)相似的处理方法, 直接给出如下结果:

$$L\mathcal{V}(t) \leq \int_0^1 \left(\mathbf{Z}^T(\mathcal{P}_2 - \mathcal{P}_1)\mathbf{Z} - \bar{\mathbf{Z}}^T\mathcal{P}_3\bar{\mathbf{Z}} + \eta(t) \left(\mathbf{Z}^T \left((\mathcal{P}_1\mathcal{A})_{\text{sym}} + \bar{\mathcal{C}}^T(\mathcal{P}_1^{-1} - r_2\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}^T)^{-1}\bar{\mathcal{C}} + r_1\mathcal{P}_1\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}^T\mathcal{P}_1 + \frac{1}{r_2}\bar{\mathcal{G}}^T\bar{\mathcal{G}} + \frac{1}{r_1}\bar{\mathcal{E}}^T\bar{\mathcal{E}} \right) \mathbf{Z} + (\mathbf{Z}^T\mathcal{P}_1\mathcal{L}\mathbf{Z}(1,t))_{\text{sym}} - \frac{\pi^2}{8}\hat{\mathbf{Z}}^T(\mathcal{Q}_2\mathcal{P}_1\mathcal{B}\mathcal{Q}_2)_{\text{sym}}\hat{\mathbf{Z}} - ((\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2\hat{\mathbf{Z}})^T\mathcal{P}_1\mathcal{B}\mathcal{K}(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_1\bar{\mathbf{Z}}))_{\text{sym}} + r_3(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2\hat{\mathbf{Z}})^T\mathcal{P}_1\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}^T\mathcal{P}_1(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2\hat{\mathbf{Z}}) + \frac{1}{r_3}(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_1\bar{\mathbf{Z}})^T\mathcal{K}^T\bar{\mathcal{F}}^T\bar{\mathcal{F}}\mathcal{K}(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_1\bar{\mathbf{Z}}) + \mathbf{Z}_x^T \left(r_4\mathcal{P}_1\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}^T\mathcal{P}_1 + \frac{1}{r_4}\bar{\mathcal{F}}^T\bar{\mathcal{F}} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_1\mathcal{B} - \frac{1}{2}\mathcal{B}\mathcal{P}_1 \right) \mathbf{Z}_x \right) + \theta(t) \left(\mathbf{Z}^T \left((\mathcal{P}_2\mathcal{A})_{\text{sym}} + \bar{\mathcal{C}}^T(\mathcal{P}_2^{-1} - r_2\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}^T)^{-1}\bar{\mathcal{C}} + r_1\mathcal{P}_2\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}^T\mathcal{P}_2 + \frac{1}{r_2}\bar{\mathcal{G}}^T\bar{\mathcal{G}} + \frac{1}{r_1}\bar{\mathcal{E}}^T\bar{\mathcal{E}} \right) \mathbf{Z} + (\mathbf{Z}^T\mathcal{P}_2\mathcal{L}\mathbf{Z}(1,t))_{\text{sym}} - \frac{\pi^2}{8}\hat{\mathbf{Z}}^T(\mathcal{Q}_2\mathcal{P}_2\mathcal{B}\mathcal{Q}_2)_{\text{sym}}\hat{\mathbf{Z}} - ((\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2\hat{\mathbf{Z}})^T\mathcal{P}_2\mathcal{B}\mathcal{K}(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_1\bar{\mathbf{Z}}))_{\text{sym}} + r_3(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2\hat{\mathbf{Z}})^T\mathcal{P}_2\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}^T\mathcal{P}_2(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_2\hat{\mathbf{Z}}) + \frac{1}{r_3}(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_1\bar{\mathbf{Z}})^T\mathcal{K}^T\bar{\mathcal{F}}^T\bar{\mathcal{F}}\mathcal{K}(\mathbf{Z} - \mathcal{Q}_1\bar{\mathbf{Z}}) + \mathbf{Z}_x^T \left(r_4\mathcal{P}_2\bar{\mathcal{D}}\bar{\mathcal{D}}^T\mathcal{P}_2 + \frac{1}{r_4}\bar{\mathcal{F}}^T\bar{\mathcal{F}} - \frac{1}{2}\mathcal{P}_2\mathcal{B} - \frac{1}{2}\mathcal{B}\mathcal{P}_2 \right) \mathbf{Z}_x \right) dx. \tag{53}$$

类似的分析过程可以证明, 在基于观测的 BSC 策略下, 只要满足适当的条件, 具有参数扰动的随机系统(46)即可保持稳定, 证毕.

注 9 值得注意的是, 上述结果也适用于混合边界条件. 即将 $z_x(0,t) = 0$ 替换为 $z(0,t) = 0$. 基于文献[29]中的讨论, 这种方法也可以解决 H_∞ 控制问题. 不仅如此, 根据文献[33], 本文的结果还可以通过指数变换扩展到一维随机反应扩散对流或平流系统.

注 10 从分析过程中可以看出, 引理 2 和引理 3 与结果的保守性密切相关. 尽管一些研究人员已经推广了引理 2, 例如文献[26]. 但是, 当引理 2 用于处理空间积分的形式时, 它不能直接应用于本文. 这也是下一步将要研究突破的课题.

4 数值仿真

本节将提供三个数值例子来说明理论的有效性,三个例子分别对应于定理 1、定理 2 和定理 3.

例 1 考虑以下 SRDS:

$$dz(x,t) = \left[0.6z(x,t) + 0.2 \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right] dt + 0.1z(x,t)dW(t), \tag{54}$$

其中, $A = 0.6, B = 0.2, C = 0.1, x \in [0, 1], t \in [0, 4]$. 初始值为 $z(x,0) = \frac{\pi}{3}x - \sin(2\pi x)$.

设 $P_1 = 1.9999, P_2 = 2, P_3 = 1, Q_1 = 0.1, Q_2 = 5, \delta = 0.8$. 假设时间采样描述数值离散点为奇数,那么最大采样间隔给定为 $h = 0.002$. 选择 $K = 10$, 相应的 BSC 设计为 $u(x,t) = -10 \int_0^1 z(x,t_k) dx, k = 1, 2, 3, \dots, 2000$. 然后,通过计算矩阵的特征值,可以直接得到式(5)和(6)都成立. 根据定理 1,此时系统(54)应是均方指数稳定的. 系统(54)的响应如图 1 所示. 另外,取 $u(x,t) = 0$, 系统(54)的响应如图 2 所示. 这两张图对比证明了提出的 BSC 是有效的.

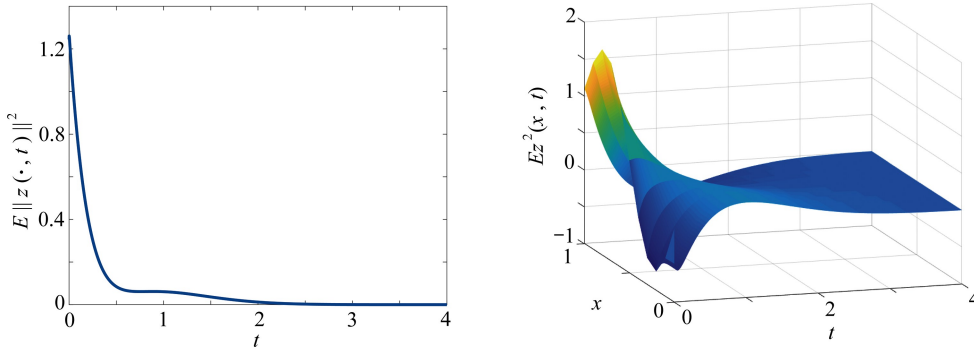


图 1 系统(54)的状态响应(有控制)

Fig. 1 The state responses of system (54) (with control)

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

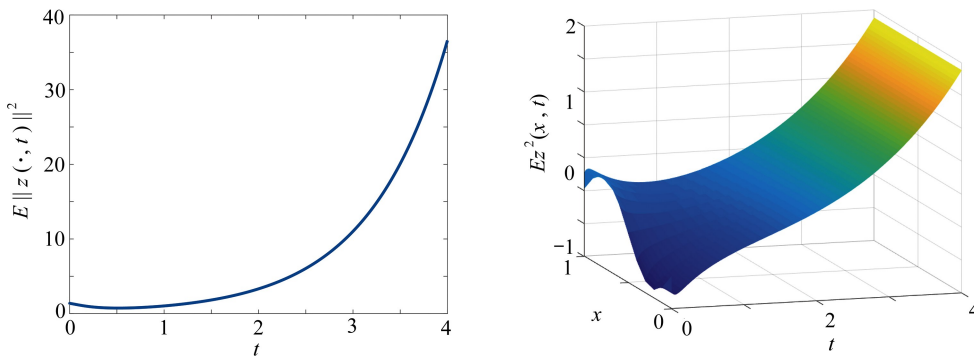


图 2 系统(54)的状态响应(无控制)

Fig. 2 The state responses of system (54) (without control)

例 2 考虑如下 SRDS:

$$dz(x,t) = \left[\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.25 & -0.2 \end{pmatrix} z(x,t) + \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.3 & 0.6 \end{pmatrix} \frac{\partial^2 z(x,t)}{\partial x^2} \right] dt + \begin{pmatrix} 0.3 & -0.3 \\ 0.3 & -0.3 \end{pmatrix} z(x,t)dW(t), \tag{55}$$

其中,初始函数和边界条件为

$$z(x, 0) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{3}x - \sin(2\pi x) \\ \frac{\pi}{3}x - \sin(2\pi x) \end{pmatrix}, z_x(0, t) = \mathbf{0}_{n \times n}, z_x(1, t) = \mathbf{u}(t) (\mathbf{0}_{n \times n}, \mathbf{I}_{n \times n})^T.$$

设 $P_1 = \begin{pmatrix} 1.9 & 0.6 \\ 0.6 & 1.9 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0.4 \\ 0.4 & 2 \end{pmatrix}, P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 \\ 0.25 & 1 \end{pmatrix}, Q_1 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{pmatrix}, Q_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \delta = 0.2$, 最大

采样间隔给定为 $h = 0.004$. 通过求解 LMI 矩阵不等式 (21) 和 (22), 可得 $K = \begin{pmatrix} -2.44 & 0.78 \\ 0.78 & -1.74 \end{pmatrix}, L =$

$\begin{pmatrix} -2.03 & -0.16 \\ -0.16 & -1.33 \end{pmatrix}$, 根据定理 2, 此时系统 (55) 为均方指数稳定的. 系统 (55) 的响应如图 3 所示. 另外, 取

$u(x, t) = 0$, 系统 (55) 的响应如图 4 所示. 这两张图对比证明了提出的基于观测的 BSC 是有效的.

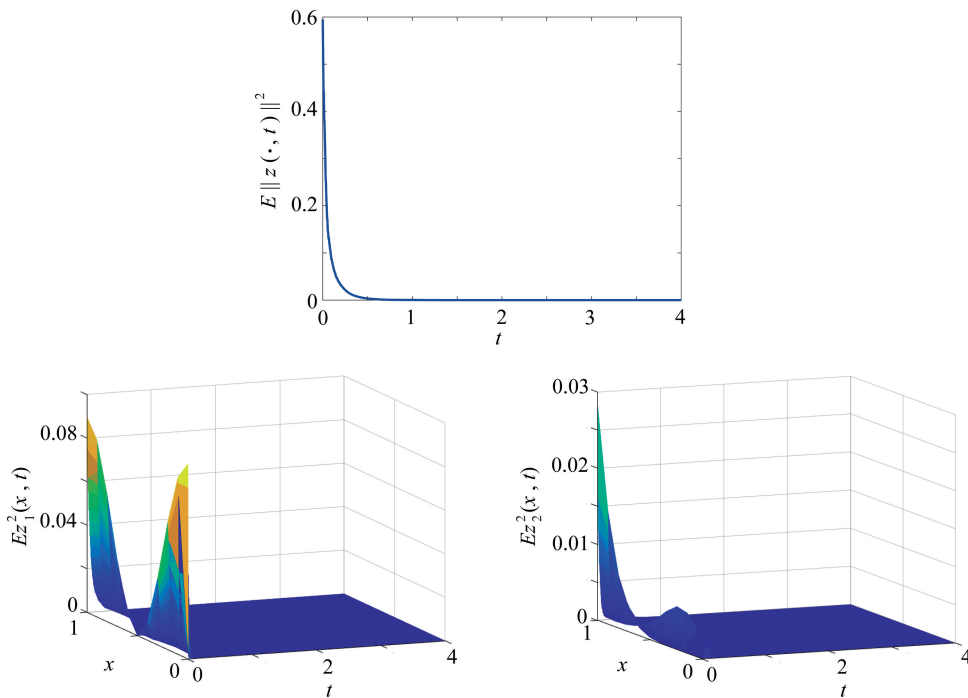


图 3 系统 (55) 的状态响应 (有控制)

Fig. 3 The state responses of system (55) (with control)

例 3 针对定理 3, 考虑以下系统:

$$dz(x, t) = \left[(0.2 + \Delta A)z(x, t) + (0.1 + \Delta B) \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} + u(x, t) \right] dt + (0.05 + \Delta C)z(x, t) dW(t), \tag{56}$$

其中, $x \in [0, 1], t \in [0, 5], \Delta A, \Delta B$ 和 ΔC 是不确定参数. 这里采用 BSC (4).

假设 $\Delta A = 0.002e^{-x} \sin(t), \Delta B = 0.001e^{-x} \sin(t)$ 和 $\Delta C = 0.015e^{-x} \cos(t)$. 选择 $r_1 = 2, r_2 = 1.5, r_3 = 2, r_4 = 5, P_1 = 1.9999, P_2 = 2, P_3 = 0.5, Q_1 = 0.1, Q_2 = 0.8, \delta = 0.8, h = 0.002$. 系统 (55) 的初始函数为 $z(x, 0) = 4\pi x/7 - \sin(2\pi x)$. 可以看出, 在给定的信息下, 假设 1 是成立的. 取 $K = 5$, 则采样控制器公式为 $u(x, t) = -5 \int_0^1 z(x, t_k) dx, k = 1, 2, 3, \dots, 2500$. 条件 (29) — (33) 成立. 根据定理 3, 系统 (55) 是均方指数随机稳定的. 系统 (55) 的响应如图 5 所示, 可以看出它是均方指数随机稳定的. 为了展示所提 BSC 的有效性, 取 $u(x, t) = 0$, 响应如图 6 所示. 显然, 它不是均方指数随机稳定的.

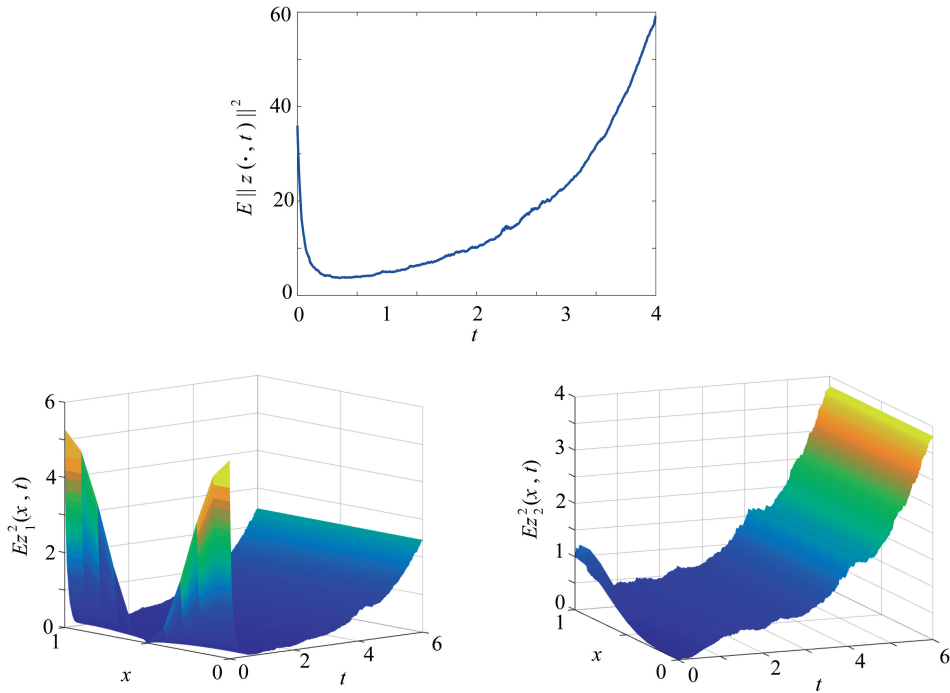


图4 系统(55)的状态响应(无控制)

Fig. 4 The state responses of system (55) (without control)

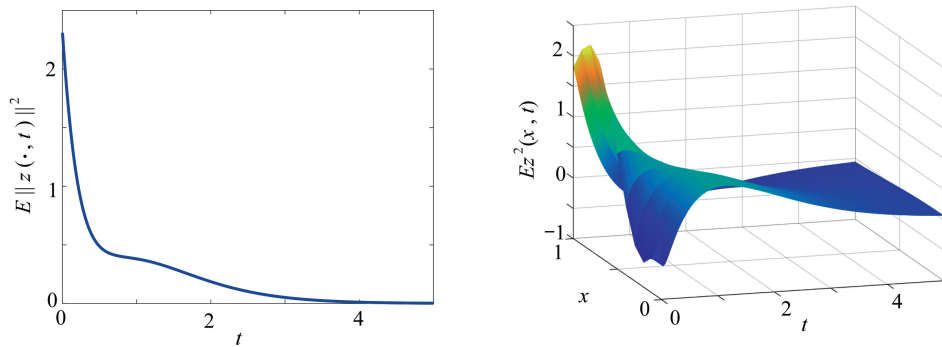


图5 系统(56)的状态响应(有控制)

Fig. 5 The state responses of system (56) (with control)

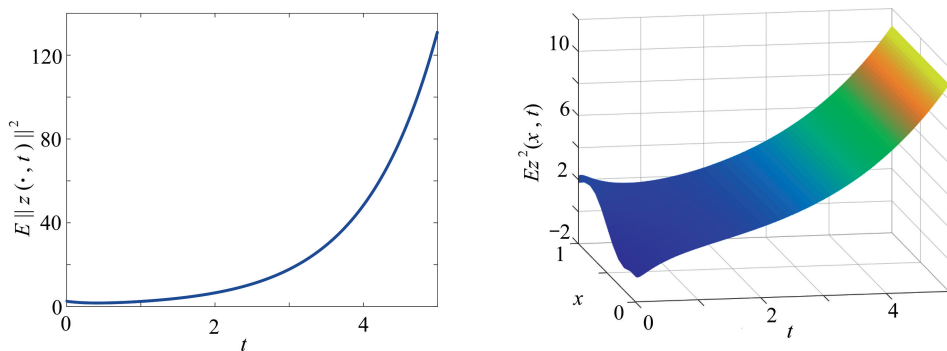


图6 系统(56)的状态响应(无控制)

Fig. 6 The state responses of system (56) (without control)

5 结 论

本文研究了 SRDS 在边界采样控制策略下的稳定性和鲁棒稳定性问题. 针对系统状态可能无法全部获得的情况, 设计了 OBBSC, 并构造了新颖的分段不连续 Lyapunov 泛函. 通过引入齐次离散变换和不等式技术, 推导出了系统均方指数稳定和鲁棒均方指数稳定的充分条件. 仿真结果表明, 所设计的控制器能够有效镇定不稳定的 SRDS, 验证了所提理论的有效性. 这些结果不仅扩展了 SRDS 控制理论的研究范围, 也为实际工程应用提供了理论支持. 对于难以建立精确数学模型的随机偏微分系统, 如何将模糊规则和边界采样控制策略结合, 设计自适应的有效镇定系统, 将是下一步研究的主要课题.

参考文献 (References):

- [1] WU K N, LIU X Z, SHI P, et al. Boundary control of linear stochastic reaction-diffusion systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, **29**(1): 268-282.
- [2] 董浩祖, 肖敏, 丁洁, 等. 具有饱和控制的时滞反应扩散谣言传播模型[J]. 系统科学与数学, 2024, **44**(1): 1-16. (DONG Haozu, XIAO Min, DING Jie, et al. Time-delay reaction-diffusion rumor propagation model with saturation control[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2024, **44**(1): 1-16. (in Chinese))
- [3] 杜彩虹. 具有蚊子叮咬偏好性的扩散疟疾模型的动力学[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(3): 345-354. (DU Caihong. Dynamics of a diffusion malaria model with vector-bias[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(3): 345-354. (in Chinese))
- [4] 徐鹤丽, 薛文宁, 高建国. 具有反应扩散的随机肿瘤免疫模型接近最优控制研究[J]. 应用数学, 2024, **37**(2): 439-455. (XU Heli, XUE Wenning, GAO Jianguo. Near-optimal control of stochastic tumor immune model with reaction diffusion[J]. *Mathematica Applicata*, 2024, **37**(2): 439-455. (in Chinese))
- [5] PAN L J, CAO J D, ALSAEDI A. Stability of reaction-diffusion systems with stochastic switching[J]. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, 2019, **24**(3): 315-331.
- [6] WU K N, WANG J. Mixed H_2/H_∞ control of synchronization for coupled partial differential systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2017, **27**(9): 1397-1418.
- [7] VAZQUEZ R, KRSTIC M. Boundary control of coupled reaction-advection-diffusion systems with spatially-varying coefficients[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(4): 2026-2033.
- [8] WU K N, WANG J, LIM C C. Synchronization of stochastic reaction-diffusion systems via boundary control[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2018, **94**(3): 1763-1773.
- [9] LEE J, MOON J H, LEE H J. Continuous-time synthesizing robust sampled-data dynamic output-feedback controllers for uncertain nonlinear systems in Takagi-Sugeno form: a descriptor representation approach[J]. *Information Sciences*, 2021, **565**: 456-468.
- [10] ZHU B, SUO M L, CHEN Y, et al. Mixed H_∞ and passivity control for a class of stochastic nonlinear sampled-data systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, **355**(7): 3310-3329.
- [11] ZHAO F L, WANG Z P, WU H N, et al. Robust event-triggered sampled-data fuzzy control with non-fragile for nonlinear delayed distributed parameter systems[J]. *International Journal of Fuzzy Systems*, 2023, **25**(6): 2312-2325.
- [12] WANG Z P, CHEN B M, QIAO J F, et al. Fuzzy boundary sampled-data control for nonlinear DPSs with random time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2024, **32**(10): 5872-5885.
- [13] WANG Z P, LI Q Q, QIAO J F, et al. Fuzzy boundary sampled-data control for nonlinear parabolic DPSs[J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2024, **54**(6): 3565-3576.
- [14] 贺彦君, 马伟伟, 池小波. 网络化非周期采样控制系统的主动时间滞后控制: 随机脉冲切换系统方法[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(4): 422-430. (HE Yanjun, MA Weiwei, CHI Xiaobo. Active time-delay control of networked control systems with aperiodic sampling: a stochastic impulsive switched system approach[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2021, **42**(4): 422-430. (in Chinese))
- [15] KARAFYLLIS I, KRSTIC M. Sampled-data boundary feedback control of 1-D parabolic PDEs[J]. *Automatica*, 2018, **87**: 226-237.
- [16] LIU H B, HU P. Boundary sampled-data feedback stabilization for parabolic equations[J]. *Systems & Control*

- Letters*, 2020, **136**: 104618.
- [17] AHMED-ALI T, GIRI F, KARAFYLLIS I, et al. Sampled boundary observer for strict-feedback nonlinear ODE systems with parabolic PDE sensor[J]. *Automatica*, 2019, **101**: 439-449.
- [18] FERRANTE F, CRISTOFARO A, PRIEUR C. Boundary observer design for cascaded ODE: hyperbolic PDE systems; a matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 2020, **119**: 109027.
- [19] XIE L, KHARGONEKAR P P. Lyapunov-based adaptive state estimation for a class of nonlinear stochastic systems[J]. *Automatica*, 2012, **48**(7): 1423-1431.
- [20] ZHAO Y, QIU J B, XU S Y, et al. Boundary observer-based control for hyperbolic PDE-ODE cascade systems with stochastic jumps[J]. *Automatica*, 2020, **119**: 109089.
- [21] YIN Y Y, SHI P, LIU F, et al. Observer-based H_∞ control on stochastic nonlinear systems with time-delay and actuator nonlinearity[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2013, **350**(6): 1388-1405.
- [22] SHAO H Y, HAN Q L, ZHANG Z Q, et al. Sampling-interval-dependent stability for sampled-data systems with state quantization[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2014, **24**(17): 2995-3008.
- [23] XIAO S P, LIAN H H, TEO K L, et al. A new Lyapunov functional approach to sampled-data synchronization control for delayed neural networks[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2018, **355**(17): 8857-8873.
- [24] LEE T H, PARK J H. Stability analysis of sampled-data systems via free-matrix-based time-dependent discontinuous Lyapunov approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, **62**(7): 3653-3657.
- [25] FRIDMAN E, BLIGHOVSKY A. Robust sampled-data control of a class of semilinear parabolic systems[J]. *Automatica*, 2012, **48**(5): 826-836.
- [26] LUO S X, DENG F Q. A note on delay-dependent stability of Itô-type stochastic time-delay systems[J]. *Automatica*, 2019, **105**: 443-447.
- [27] CHEN W H, LUO S X, ZHENG W X. Sampled-data distributed H_∞ control of a class of 1-D parabolic systems under spatially point measurements[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 2017, **354**(1): 197-214.
- [28] ZHANG X M, WU H N. H_∞ boundary control for a class of nonlinear stochastic parabolic distributed parameter systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, **29**(14): 4665-4680.
- [29] WU Z G, PARK J H, SU H Y, et al. Discontinuous Lyapunov functional approach to synchronization of time-delay neural networks using sampled-data[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2012, **69**(4): 2021-2030.
- [30] XING M L, DENG F Q. Dynamic output feedback control for stochastic networked control systems based on a periodic event-triggered mechanism[J]. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2019, **41**(7): 1975-1984.
- [31] LIU X Z, WU K N, ZHANG W H. Mean square finite-time boundary stabilisation and H_∞ boundary control for stochastic reaction-diffusion systems[J]. *International Journal of Systems Science*, 2019, **50**(7): 1388-1398.
- [32] HAN X X, WU K N, DING X H, et al. Boundary control of stochastic reaction-diffusion systems with Markovian switching[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, **30**(10): 4129-4148.
- [33] WEI T D, WANG L S, WANG Y F. Existence, uniqueness and stability of mild solutions to stochastic reaction-diffusion Cohen-Grossberg neural networks with delays and Wiener processes[J]. *Neurocomputing*, 2017, **239**: 19-27.