

黏弹性能量阱系统振动抑制响应分析*

王道航¹, 周紫怡¹, 刘春霞², 孙博¹, 兰树伟³

- (1. 昆明理工大学 公共安全与应急管理学院, 昆明 650000;
2. 云南财经大学 统计与数学学院, 昆明 650000;
3. 昆明学院 建筑工程学院, 昆明 650214)

摘要: 黏弹性材料因其优良的减振特性,被广泛应用于土木、航空等领域.本文将非线性刚度 Zener 模型替代传统非线性能量阱中的能量传递元件,提出一种新型黏弹性能量阱装置,并探讨了简谐激励下模型的分岔行为.首先,基于非线性刚度 Zener 模型建立了耦合主结构-能量阱系统的非线性动力学控制方程,采用复变量平均法解析推导了 1:1 共振条件下的慢变系统方程.基于此,系统揭示了慢变条件下关键参数对系统黏弹性能量阱分岔行为的影响规律,并结合数值模拟方法,以主结构减振效率和能量传递效率为指标,进一步探讨了不同分岔区域黏弹性能量阱的振动抑制效能.研究表明:新型黏弹性能量阱通过参数调控可有效调控系统的鞍结分岔和 Hopf 分岔等分岔行为,显著提升了系统的减振效率与能量传递效率,并有效抑制了主结构的位移响应.本研究为新型黏弹性能量阱的工程设计与参数优化提供了一定的理论依据.

关键词: 非线性能量阱; Zener 模型; 复变量平均法; 分岔研究; 振动控制
中图分类号: O322 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460004

Analysis of Vibration Suppression Response in Viscoelastic Energy Trap Systems

WANG Daohang¹, ZHOU Ziyi¹, LIU Chunxia²,
SUN Bo¹, LAN Shuwei³

- (1. Faculty of Public Security and Emergency Management, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650000, P.R.China;
2. School of Statistics and Mathematics, Yunnan University of Finance and Economics, Kunming 650000, P.R.China;
3. School of Architecture and Civil Engineering, Kunming University, Kunming 650214, P.R.China)

Abstract: Viscoelastic materials are extensively utilized in civil engineering, aviation, and other domains owing to their superior vibration damping characteristics. The nonlinear stiffness Zener model was employed to replace the energy transfer elements in the conventional nonlinear energy trap, thereby making a novel viscoelastic en-

* 收稿日期: 2025-01-08; 修订日期: 2026-03-17

基金项目: 云南省科技厅基础研究计划专项(面上项目)(202501AT070448);云南省科技厅基础研究专项(面上项目)(202401AT070031);昆明理工大学自然科学研究基金(人培项目)(241120230015)

作者简介: 王道航(1983—),男,讲师,博士(E-mail: wang_daohang@163.com);

刘春霞(1989—),女,副教授,博士(通信作者. E-mail: lcx13099971218@163.com).

引用格式: 王道航,周紫怡,刘春霞,孙博,兰树伟.黏弹性能量阱系统振动抑制响应分析[J].应用数学和力学,2026,47(4):454-467.

ergy trap device. Furthermore, the bifurcation behavior of the model under simple harmonic excitation was investigated. Initially, the nonlinear dynamic control equation for the coupled main structure-energy trap system was formulated based on the nonlinear stiffness Zener model. Subsequently, the slow-varying system's equation under the 1 : 1 resonance condition was analytical derived with the complex variable averaging method. On this basis, the effects of key parameters on the bifurcation behavior of the system's viscoelastic energy trap under slow-changing conditions were elucidated. Through integration of the numerical simulation approach and in view of the vibration reduction efficiency and energy transfer efficiency of the main structure as evaluation indicators, the vibration suppression effectiveness of the viscoelastic energy trap across different bifurcation regions was further explored. The results indicate that, the newly developed viscoelastic energy trap can effectively modulate saddle-node bifurcations and Hopf bifurcations through parameter adjustments, thereby significantly enhancing the system's vibration damping efficiency and energy transfer efficiency while effectively restraining the displacement response of the main structure. This research provides a robust theoretical foundation for the engineering design and parameter optimization of the innovative viscoelastic energy trap.

Key words: nonlinear energy trap; Zener model; complex variable averaging method; bifurcation study; vibration control

0 引 言

传统的线性调谐质量阻尼器(TMD)在振动控制中通常依赖于固定的刚度和阻尼特性,这使得它们在面对非线性振动或突发性激励时,往往表现出较低的能量吸收能力.相比之下,非线性能量阱具有独特的非线性力学特性,使其能够在较大的振幅范围内吸收振动能量,并且提供更好的振动控制性能^[1].黏弹性材料因其具有优异的非线性行为和良好的能量耗散特性而被应用于非线性能量阱中.不仅如此,黏弹性能量阱的非线性特性使得其在振动幅度变化时能够更有效地调节能量,从而提高系统振动抑制的能力^[2].因此,黏弹性能量阱在复杂系统中具有更强的适应性和更高的能效,尤其在减振领域展现出独特的优势.

在众多黏弹性模型中,Zener 模型因其能够准确地模拟黏弹性材料的非线性特性而被广泛应用.对于此种模型,Wang 等^[3]通过将非线性刚度元件引入 Zener 模型中,表明具有非线性刚度的 Zener 模型能充分提高线性阻尼隔振器的减振效率.文献[4]利用 Zener 模型对黏弹性材料的流变特性进行了分析,利用粒子群优化算法确定了分数 Zener 模型的参数并对其进行分析,验证了黏弹性流变模型的有效性.Yu 等^[5]利用 Zener 模型表征黏弹性材料的动力学特性,对系统进行研究,得出了系统稳定性的判别条件,以此来获取系统双参数平面内的鞍结分岔集.

然而,黏弹性材料的非线性特性同时增加了系统分析的复杂性.尤其在简谐激励下,黏弹性系统可能会诱发鞍结分岔、Hopf 分岔等复杂动力学行为.因此,揭示能量阱系统的复杂动力学行为对提升其减振效果具有重要意义.针对能量阱系统分岔行为的研究,严巧赞等^[6]通过建立轴向运动梁的黏弹性模型,首次观测到系统在特定参数域内呈现分岔与混沌等复杂动力学现象,其基于非线性动力学特征的系统分析方法为工程中非线性运动系统的混沌调控提供了新思路.张运法等^[7]则聚焦分岔特性与参数关联规律,建立了激励幅值-频率参数空间与线性振子振幅响应的定量映射关系,并通过数值仿真验证了组合刚度 NES 的卓越减振性能.文献[8]融合动力学建模与慢变流形分析方法,不仅精确刻画了系统分岔边界在参数空间的分布规律,还通过对比实验证明几何阻尼吸振器较传统线性阻尼具有更优的能量耗散特性,为工程减振设计开辟了非线性调控新路径.

在现有对黏弹性能量阱系统的研究中,多集中于研究其相关模型的减振机理,但对于其在黏弹性系统中的复杂动力学行为的研究相对较少,所以本文将聚焦于研究在简谐激励下黏弹性 Zener 模型的分岔行为对单自由度能量阱振动抑制行为的影响,从理论和数值两个层面来进行分析系统的分岔行为,明确不同类型的分岔现象对系统减振效率的影响.最后,系统地评估黏弹性能量阱系统在简谐激励下的减振效率,并揭示分岔行为与减振性能之间的内在联系.

1 建立动力学模型

本文将黏弹性 Maxwell 器件代替传统线性阻尼, 构成黏弹性 Zener 模型, 如图 1 所示. 其中, m_1 为主系统质量, k_1 为主系统弹簧的线性刚度系数, c_1 为主系统阻尼系数. 黏弹性能量阱安装于主系统上层并与其耦合连接, 其组成元素包括质量 m_2 、黏弹性 NES 的立方刚度系数 k_2 、黏弹性 Maxwell 器件的刚度系数 k_3 以及阻尼系数 c_2 ; F 和 $\tilde{\omega}$ 分别为外激励幅值和频率, x_n ($n = 1, 2, 3$) 分别表示主结构和黏弹性能量阱结构产生的位移.

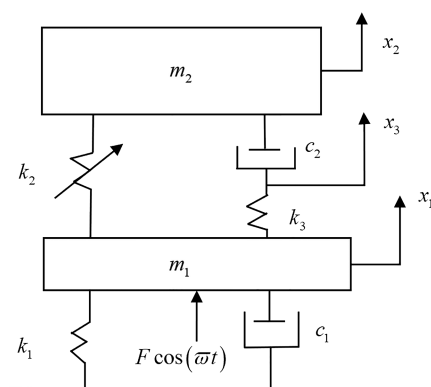


图 1 黏弹性 Zener 模型

Fig. 1 The viscoelastic Zener model

根据图 1 可建立动力学方程如下:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2)^3 + k_3 (x_1 - x_3) = F \cos(\tilde{\omega} t), \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_2 (x_2 - x_1)^3 = 0, \\ c_2 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + k_3 (x_3 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

引入如下变量变换:

$$\varepsilon = \frac{m_2}{m_1}, \omega_1^2 = \frac{k_1}{m_1}, \varepsilon \alpha_1 = \frac{k_2}{k_1}, \varepsilon \alpha_2 = \frac{k_3}{k_1}, \lambda_1 = \frac{c_1}{\varepsilon m_1 \omega_1}, \lambda_2 = \frac{c_2}{m_2 \omega_1}, \frac{F}{k_1} = \varepsilon f, \omega = \frac{\tilde{\omega}}{\omega_1}, \tau = \omega_1 t.$$

上述动力学方程可化简为

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \varepsilon \lambda_1 \dot{x}_1 + x_1 + \varepsilon \alpha_1 (x_1 - x_2)^3 + \varepsilon \alpha_2 (x_1 - x_3) = \varepsilon f \cos(\omega \tau), \\ \ddot{x}_2 + \lambda_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + \alpha_1 (x_2 - x_1)^3 = 0, \\ \lambda_2 (\dot{x}_3 - \dot{x}_2) + \alpha_2 (x_3 - x_1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

本文仅研究系统在外激励频率 ω 下的 1:1:1 共振情况, 考虑系统在线性振子自然频率附近的小邻域内的动力学特性, 因此假设外激励频率和线性振子自然频率之间的差距为 ε^1 的同阶小量, 满足 $\omega = 1 + \varepsilon \sigma$. 为简化方程, 引入变量代换:

$$u = x_1 + \varepsilon x_2, v = x_1 - x_2, w = x_1 - x_3.$$

将上述变量代入式(2)得

$$\begin{cases} \ddot{u} + \varepsilon \lambda_1 \frac{\dot{u} + \varepsilon \dot{v}}{1 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon v + u}{1 + \varepsilon} = \varepsilon f \cos((1 + \varepsilon \sigma) \tau), \\ \ddot{v} + \varepsilon \lambda_1 \frac{\dot{v} + \varepsilon \dot{w}}{1 + \varepsilon} + \frac{\varepsilon v + u}{1 + \varepsilon} + (1 + \varepsilon) \alpha_1 v^3 + (1 + \varepsilon) \alpha_2 w = \varepsilon f \cos((1 + \varepsilon \sigma) \tau), \\ \varepsilon \lambda_2 (\dot{v} - \dot{w}) = \varepsilon \alpha_2 w. \end{cases} \quad (3)$$

采用复变量平均法^[9]计算得到系统慢变方程时, 需引入变量代换: $\psi_1 e^{i(1+\varepsilon\sigma)\tau} = \dot{u} + iu$, $\psi_2 e^{i(1+\varepsilon\sigma)\tau} = \dot{v} + iv$, $\psi_3 e^{i(1+\varepsilon\sigma)\tau} = \dot{w} + iw$, 其中 i 为复数单位.

将上述变量代入方程(3)并化简得到如下方程:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 + i\varepsilon\sigma\psi_1 + \frac{i\varepsilon(\psi_1 - \psi_2)}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon\lambda_1(\psi_1 + \varepsilon\psi_2)}{2(1 + \varepsilon)} = \frac{\varepsilon f}{2}, \\ \dot{\psi}_2 + i\varepsilon\sigma\psi_2 + \frac{i(\psi_2 - \psi_1)}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon\lambda_1(\psi_1 + \varepsilon\psi_2)}{2(1 + \varepsilon)} - \frac{3i(1 + \varepsilon)\alpha_1\psi_2 |\psi_2|^2}{8} - \frac{i(1 + \varepsilon)\alpha_2\psi_3}{2} = \frac{\varepsilon f}{2}, \\ \psi_3 = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - i\alpha_2}\psi_2. \end{cases} \quad (4)$$

为方便后续的计算,将第三式中的 ψ_3 代入第二式中得到新的慢变方程:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 + i\varepsilon\sigma\psi_1 + \frac{i\varepsilon(\psi_1 - \psi_2)}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon\lambda_1(\psi_1 + \varepsilon\psi_2)}{2(1 + \varepsilon)} = \frac{\varepsilon f}{2}, \\ \dot{\psi}_2 + i\varepsilon\sigma\psi_2 + \frac{i(\psi_2 - \psi_1)}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon\lambda_1(\psi_1 + \varepsilon\psi_2)}{2(1 + \varepsilon)} - \frac{3i(1 + \varepsilon)\alpha_1\psi_2 |\psi_2|^2}{8} + \frac{(\alpha_2 - i\lambda_2)(1 + \varepsilon)\alpha_2\lambda_2}{2(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)}\psi_2 = \frac{\varepsilon f}{2}. \end{cases} \quad (5)$$

2 分岔研究

本节将对黏弹性能量阱的分岔行为进行研究,以探讨系统参数对黏弹性能量阱分岔行为的影响.首先令方程(5)中导数项为 0,得慢变系统稳态平衡点代数方程:

$$\begin{cases} i\varepsilon\sigma\psi_1 + \frac{i\varepsilon(\psi_1 - \psi_2)}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon\lambda_1(\psi_1 + \varepsilon\psi_2)}{2(1 + \varepsilon)} = \frac{\varepsilon f}{2}, \\ i\varepsilon\sigma\psi_2 + \frac{i(\psi_2 - \psi_1)}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{\varepsilon\lambda_1(\psi_1 + \varepsilon\psi_2)}{2(1 + \varepsilon)} - \frac{3i(1 + \varepsilon)\alpha_1\psi_2 |\psi_2|^2}{8} + \frac{(\alpha_2 - i\lambda_2)(1 + \varepsilon)\alpha_2\lambda_2}{2(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)}\psi_2 = \frac{\varepsilon f}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

分离变量得

$$\psi_1 = \frac{f(1 + \varepsilon) + \psi_2(i - \varepsilon\lambda_1)}{(2\varepsilon\sigma + 2\sigma + 1)i + \lambda_1} \left(i\varepsilon\sigma + \frac{i}{2} + \frac{\varepsilon(\varepsilon\lambda_1 - i)}{2(1 + \varepsilon)} + \frac{2i\varepsilon\lambda_1 + 1 - \varepsilon^2\lambda_1^2}{2(1 + \varepsilon)((2\varepsilon\sigma + 2\sigma + 1)i + \lambda_1)} - \frac{i\alpha_2\lambda_2(1 + \varepsilon)}{2(i\alpha_2 - \lambda_2)} - \frac{3i\alpha_1 |\psi_2|^2(1 + \varepsilon)}{8} \right) \psi_2 = \frac{\varepsilon f}{2} + \frac{f(i - \varepsilon\lambda_1)}{2((2\varepsilon\sigma + 2\sigma + 1)i + \lambda_1)}.$$

设 $\psi_2 = Ne^{i\theta}$, 将第二个式子关于两侧复变量取模并平方可得关于相对幅值平方的三次代数方程:

$$r_3R^3 + r_2R^2 + r_1R + r_0 = 0, \quad (7)$$

方程(7)中的系数详见附录.

一元三次方程(7)的根可根据 Cardano 判别式来确定:

$$\Delta = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad (8)$$

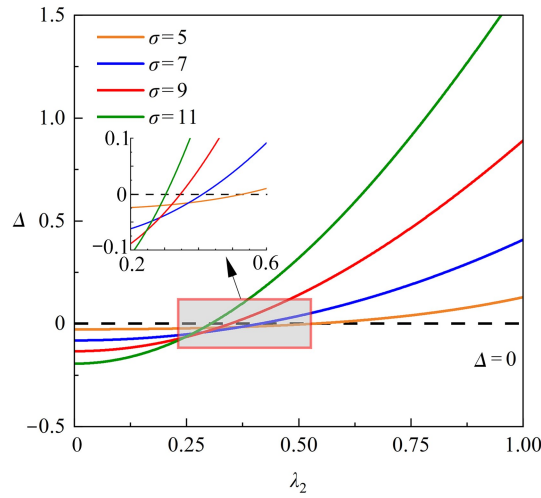
其中

$$p = \frac{3r_1r_3 - r_2^2}{3r_3^2}, \quad q = \frac{27r_0r_3^2 - 9r_1r_2r_3 + 2r_2^3}{27r_3^3}.$$

当 $\Delta > 0$ 时,方程(7)有一个实数根,这时系统只有一个平衡点;当 $\Delta < 0$ 时,方程(7)有三个不相等实根,这时系统有三个不相等的平衡点.当 $\Delta = 0$ 时,系统会发生鞍结分岔.

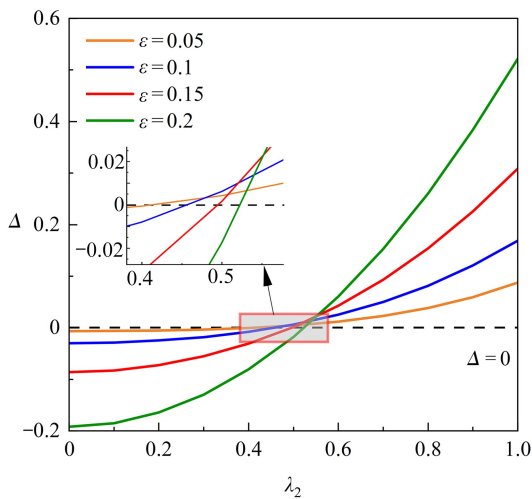
图 2 绘制了阻尼参数与判别式的关系图,系统性地展示了调谐质量参数 (σ)、质量比 (ε) 及刚度比 (α_1) 变化等关键参数与阻尼的映射关系.通过式(8)可知,当 $\Delta = 0$ 时系统会出现鞍结分岔现象.图 2(a) 揭示了调谐质量参数 (σ) 与阻尼参数间的负相关性,即调谐质量参数 (σ) 的增大,诱发鞍结分岔所需的阻尼值呈单调递减趋势.与之形成鲜明对比的是,质量比 (ε) 和刚度比 (α_1) 这两个参数与阻尼之间呈现的正相关

关系,如图2(b)和2(c)所示,二者参数值的增加均会导致系统产生鞍结分岔所需的阻尼增大.以上参数的讨论为鞍结分岔成图提供了理论框架.



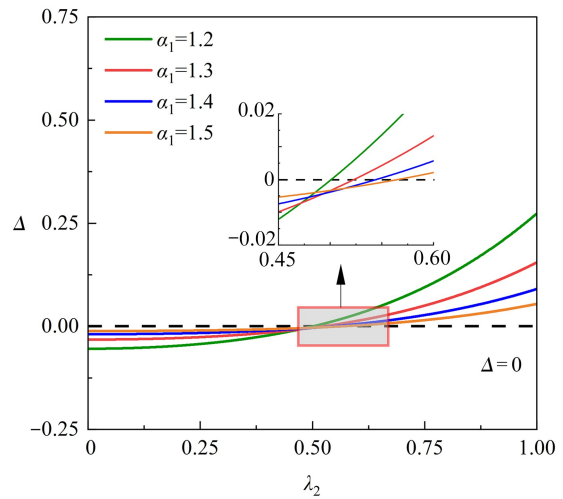
(a) σ 变化时 ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \varepsilon = 0.1, f = 4, \lambda_1 = \lambda_2$)

(a) Variations with σ ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \varepsilon = 0.1, f = 4, \lambda_1 = \lambda_2$)



(b) ε 变化时 ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, f = 4, \lambda_1 = \lambda_2$)

(b) Variations with ε ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, f = 4, \lambda_1 = \lambda_2$)



(c) α_1 变化时 ($\alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \varepsilon = 0.1, f = 4, \lambda_1 = \lambda_2$)

(c) Variations with α_1 ($\alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \varepsilon = 0.1, f = 4, \lambda_1 = \lambda_2$)

图2 参数变化时的 λ_2 - Δ 关系图

Fig. 2 The λ_2 - Δ relationship diagram with the parameter changes

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

为证实图2结论,下面将分析不同参数变化时鞍结分岔的成图情况.

将方程(7)对 R 求导得

$$3r_3R_3^2 + 2r_2R + r_1 = 0, \tag{9}$$

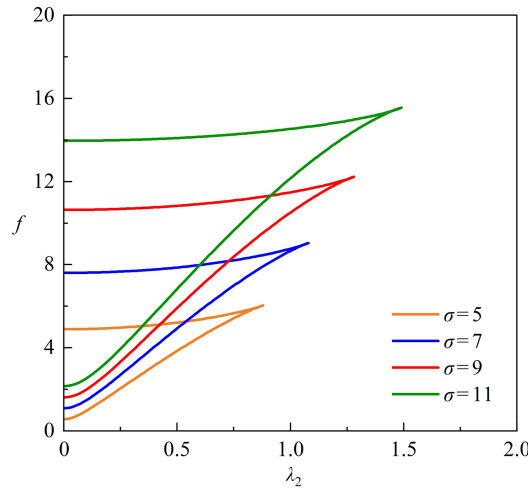
再用求根公式解出 R 并代入方程(7)中可得边界条件为

$$r_3^* R_{1,2}^3 + r_2^* R_{1,2}^2 + r_1^* R_{1,2} = f^2. \tag{10}$$

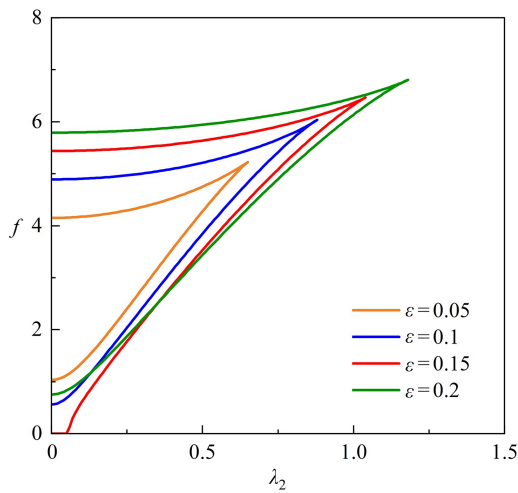
根据式(10)绘制调谐质量参数、质量比和刚度比等参数变化时的鞍结分岔图,如图3所示.

通过对上述鞍结分岔图的对比分析,可以发现如下规律:当系统外激励幅值保持恒定时,不同参数的变化对系统阻尼变化的影响也不同.具体而言,在图3(a)中,随着调谐质量参数(σ)的增大,阻尼参数呈现递

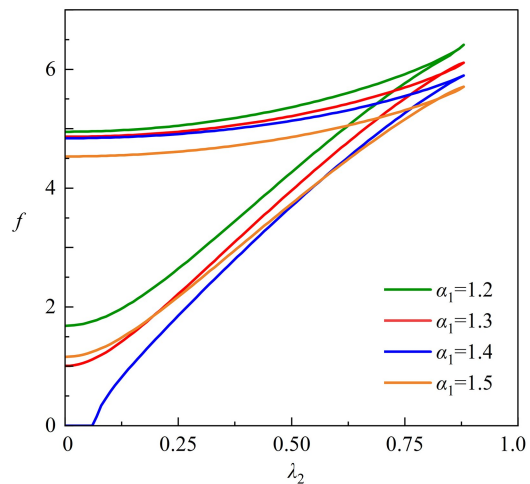
减趋势;而在图 3(b)和 3(c)中,随着质量比 (ε) 和刚度比 (α_1) 的增大,成图所需的阻尼参数也同步增加.这一结论与图 2 的分析结果高度一致.进一步观察发现,在保持其他参数不变的情况下,单独调节调谐质量参数 (σ) 或质量比 (ε) 时会显著改变分岔图的几何特征,即随着参数的增大,由平面 $[\lambda_2, f]$ 构成的分岔面积也增大.从形态学角度分析,鞍结分岔曲线的上部始终保持着稳定的几何特性,即无论参数如何变化,该区段始终维持相对平缓的特征;而曲线下半部对参数变化具有高度敏感性,其形态会随参数改变产生显著的陡峭度变化.特别值得注意的是刚度比 (α_1) 的特殊影响:当其数值增大时,虽然分岔区域的整体面积变化幅度较小,但分岔曲线右侧顶点始终位于一条竖直线上.



(a) σ 变化时 ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \varepsilon = 0.1, \lambda_1 = \lambda_2$)
 (a) Variations with $\sigma(\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \varepsilon = 0.1, \lambda_1 = \lambda_2)$



(b) ε 变化时 ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \lambda_1 = \lambda_2$)
 (b) Variations with $\varepsilon(\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \lambda_1 = \lambda_2)$



(c) α_1 变化时 ($\alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \varepsilon = 0.1, \lambda_1 = \lambda_2$)
 (c) Variations with $\alpha_1(\alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \varepsilon = 0.1, \lambda_1 = \lambda_2)$

图 3 不同参数变化时的鞍结分岔图

Fig. 3 The bifurcation diagram of the saddle node for different parameter variations

继续探究鞍结分岔的平衡点情况,绘制 $\varepsilon = 0.1, \alpha_1 = 1.44, \alpha_2 = 3.5, \sigma = 5, \lambda_1 = \lambda_2$ 时的鞍结分岔图.如图 4 所示,在参数平面 $[\lambda_2, f]$ 内,系统的鞍结分岔边界呈现出近似三角形的几何特征.为研究参数在平面不同区域对应的平衡点数量特征,选取阻尼 $\lambda_2 = 0.2$, 取三个 f 分别为 7, 3.5, 1 的点进行分析.计算结果表明:当参数点位于该“三角形”区域内时 ($\Delta < 0$), 系统呈现三个平衡点共存状态;而当参数点处于“三角形”区域外时 ($\Delta > 0$), 系统仅有单一平衡点存在.

为了探讨不同鞍结分岔区域中,各平衡点的稳定性,令

$$\psi_1 = \psi_{10} + \Delta_1, \psi_2 = \psi_{20} + \Delta_2,$$

其中, $\Delta_j(j = 1, 2, 3)$ 与 ε 同阶, 将变量代入方程(5), 可以得到以下矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} \dot{\Delta}_1 \\ \dot{\Delta}_1^* \\ \dot{\Delta}_2 \\ \dot{\Delta}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_1^* \\ \Delta_2 \\ \Delta_2^* \end{pmatrix}, \tag{11}$$

其中各项系数详见附录.

根据矩阵(11)可得到其特征多项式为

$$\mu^4 + \gamma_3\mu^3 + \gamma_2\mu^2 + \gamma_1\mu + \gamma_0 = 0, \tag{12}$$

令 $\lambda_1 = 0$, 经过计算可得特征多项式的系数, 详见附录.

根据 Lyapunov 理论, 当 Hopf 分岔出现时, 在复平面内系统的特征根穿越虚轴, 即设虚数特征值为 $\mu = \pm i\Omega$. 代入方程(12)可得

$$\Omega^4 - \gamma_2\Omega^2 + \gamma_0 = 0, \Omega^2 = \frac{\gamma_1}{\gamma_3}, \tag{13}$$

整理得

$$\gamma_1^2 - \gamma_1\gamma_2\gamma_3 + \gamma_0\gamma_3^2 = 0. \tag{14}$$

将上式整理成关于 R 的多项式:

$$v_1R^2 + v_2R + v_3 = 0, \tag{15}$$

系数 $v_j(j = 1, 2, 3)$ 详见附录.

方程(15)的解可以表现为

$$R_{1,2} = \frac{-v_2 \pm \sqrt{v_2^2 - 4v_1v_3}}{2v_1}, \tag{16}$$

将 $R_{1,2}$ 代入方程(10)可得 Hopf 分岔的稳定边界条件:

$$r_3^* R_j^3 + r_2^* R_j^2 + r_1^* R_j = f^2, \quad j = 1, 2. \tag{17}$$

取参数 $\varepsilon = 0.1, \alpha_1 = 1.44, \alpha_2 = 3.5, \sigma = 5, \lambda_1 = \lambda_2$ 可绘制 Hopf 分岔如图 5 所示, Hopf 分岔将系统分为“稳定区”和“不稳定区”两个区域.

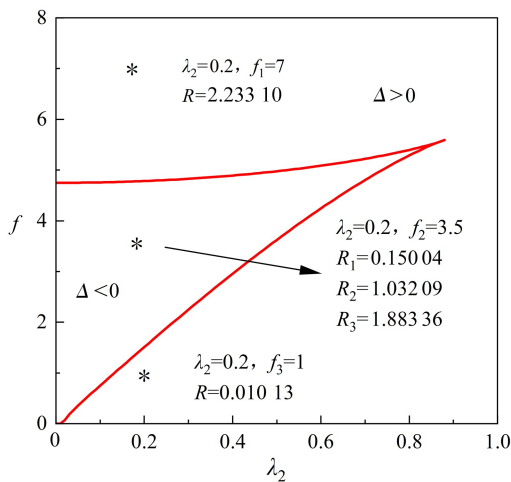


图 4 参数平面 $[\lambda_2, f]$ 内的鞍结分岔图
Fig. 4 The saddle junction bifurcation diagram in parameter plane $[\lambda_2, f]$

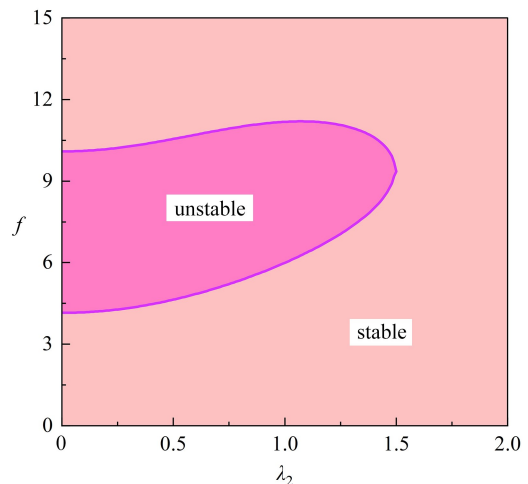
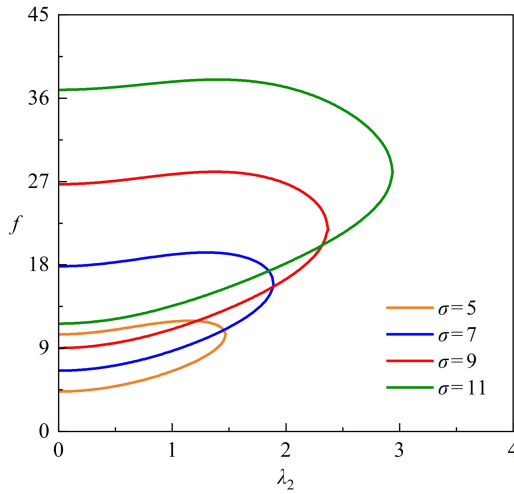


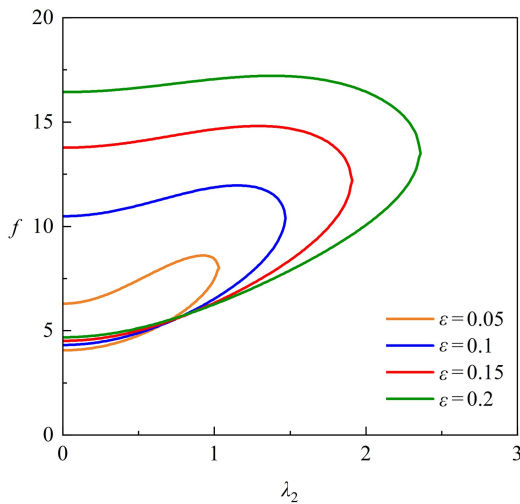
图 5 参数平面 $[\lambda_2, f]$ 内的 Hopf 分岔图
Fig. 5 The Hopf bifurcation diagram in parameter plane $[\lambda_2, f]$

通过改变参数, 观察 Hopf 分岔的形态演化规律. 与鞍结分岔类似, 如图 6(a) 和 6(b) 所示, 当其余参数均

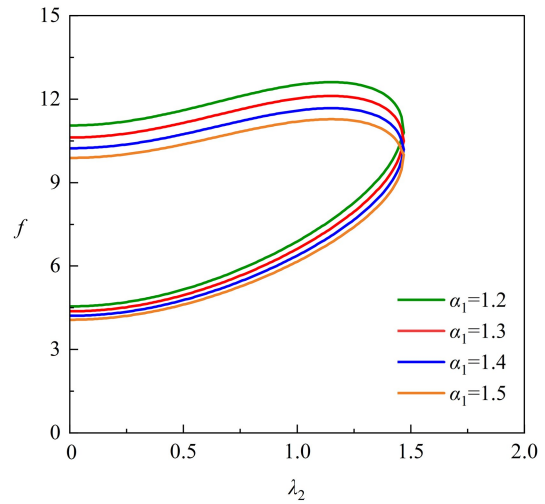
不变,仅 σ 或 ε 变化时,Hopf 分岔曲线始终维持类椭圆状,且其覆盖区域面积随参数值的增加呈单调递增趋势.如图 6(c)所示,当 α_1 变大后分岔边界围成的区域面积虽未显著变化,但其几何构型展现出独特的约束特性,即曲线右侧顶点始终位于一条竖直线上.



(a) σ 变化时 ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \varepsilon = 0.1, \lambda_1 = \lambda_2$)
 (a) Variations with σ ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \varepsilon = 0.1, \lambda_1 = \lambda_2$)



(b) ε 变化时 ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \lambda_1 = \lambda_2$)
 (b) Variations with ε ($\alpha_1 = 4/3, \alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \lambda_1 = \lambda_2$)



(c) α_1 变化时 ($\alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \varepsilon = 0.1, \lambda_1 = \lambda_2$)
 (c) Variations with α_1 ($\alpha_2 = 4.5, \sigma = 5, \varepsilon = 0.1, \lambda_1 = \lambda_2$)

图 6 不同参数变化时的 Hopf 分岔图

Fig. 6 The bifurcation diagram of the Hopf bifurcation for different parameter values

3 黏弹性能量阱的抑制振动特性

本节将采用数值方法,以主结构减振效率、能量传递率为指标,探讨不同分岔区域对黏弹性能量阱抑振性能的影响.

定义系统减振效率为 η_A :

$$\eta_A = \frac{A_w - A_o}{A_w} \times 100\%, \tag{18}$$

其中, A_w 和 A_o 分别为未耦合能量阱和耦合能量阱的主系统最大振幅.

将系统的能量表达式定义为

$$\bar{E} = \langle (x_1^2 + \dot{x}_1^2)/2 \rangle_t, \tag{19}$$

其中, $\langle \rangle_t$ 为一段时间 t 内的平均能量, $t \in [2\ 000, 3\ 000]$ 。

基于式(19)定义平均能量传递效率 η_E :

$$\eta_E = \left| \frac{\bar{E}_1 - \bar{E}_2}{\bar{E}_2} \right| \times 100\%, \tag{20}$$

其中 \bar{E}_1 和 \bar{E}_2 分别为耦合能量阱和未耦合能量阱的主系统平均能量。

以参数 $\varepsilon = 0.1, \alpha_1 = 1.44, \alpha_2 = 3.5, \sigma = 5, \lambda_1 = \lambda_2$ 绘制的分岔图为例,分析不同分岔区域对黏弹性能量阱抑振性能的影响。

如图7所示,分岔边界将参数平面划分为A,B,C,D四个特征区域。可以观察到:在A区域内,系统没有分岔点产生,系统始终维持全局渐近稳定状态;B区域对应Hopf分岔主导系统行为的不稳定区,此时系统稳定性较A区域显著降低,但暂无鞍结分岔点产生;在C区域参数范围内,鞍结分岔与Hopf分岔产生非线性耦合效应,两者的交互作用引发吸引子结构重组,导致系统的不稳定性进一步加剧;D区域则呈现鞍结分岔主导的动力学特征,其参数条件将引导系统向三周期解方向演化。

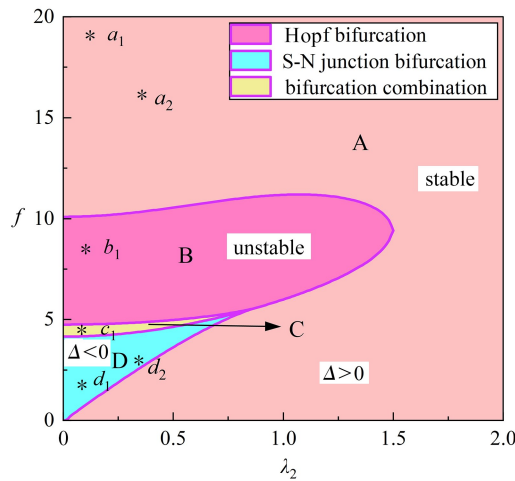


图7 参数平面 $[\lambda_2, f]$ 内鞍结分岔和Hopf分岔的结合图

Fig. 7 Combination diagram of the saddle junction bifurcation and the Hopf bifurcation in parameter plane $[\lambda_2, f]$

在A,B,C,D四区域中选取阻尼参数相同但激励幅值不同的四个点 a_1, b_1, c_1, d_1 , 将以上四点在MATLAB中利用Runge-Kutta法进行数值模拟,可得主结构频率响应如图8所示。

图8所示的下降率近似反映了黏弹性能量阱的减振效率,通过对比系统振动幅频响应可以发现:主系统振幅达到峰值时,耦合能量阱的振动幅值始终显著低于未耦合状态。当系统位于 a_1, b_1, c_1, d_1 四个特征观测点时,黏弹性能量阱的减振效率分别为87.25%、88.21%、90.43%和97.39%。这一数据揭示出分岔行为对系统减振效率的提升具有决定性作用。但不同分岔类型对减振效率的影响呈现显著差异:在鞍结分岔主导的三周期解区域,系统减振效率达到最大值。这种现象的机理在于,鞍结分岔引发的三平衡点状态显著拓展了系统的能量捕获范围,从而实现对振动能量的高效耗散。与鞍结分岔相比,Hopf分岔对减振效果的提升有限,其主要原因在于Hopf分岔通常只涉及系统的振动模式变化,而非显著改变系统的能量分布路径。综合以上数值模拟和理论分析可知,分岔现象对减振能力的提升具有决定性作用和层级化特征,不同分岔类型的减振效果依次为:单一鞍结分岔(D区域)>鞍结-Hopf混合分岔(C区域)>单一Hopf分岔(B区域)>未发生分岔状态(A区域)。这一发现为优化黏弹性能量阱参数设计提供了重要理论依据,即通过主动诱导系统进入鞍结分岔三周期解区域,可最大限度提升能量阱的能量耗散能力。

为了进一步验证以上结论,在A,D两区域选取 a_1, a_2, d_1, d_2 四点,对其在 $\omega = 1$ 时的时间-位移关系分析,如图9所示。

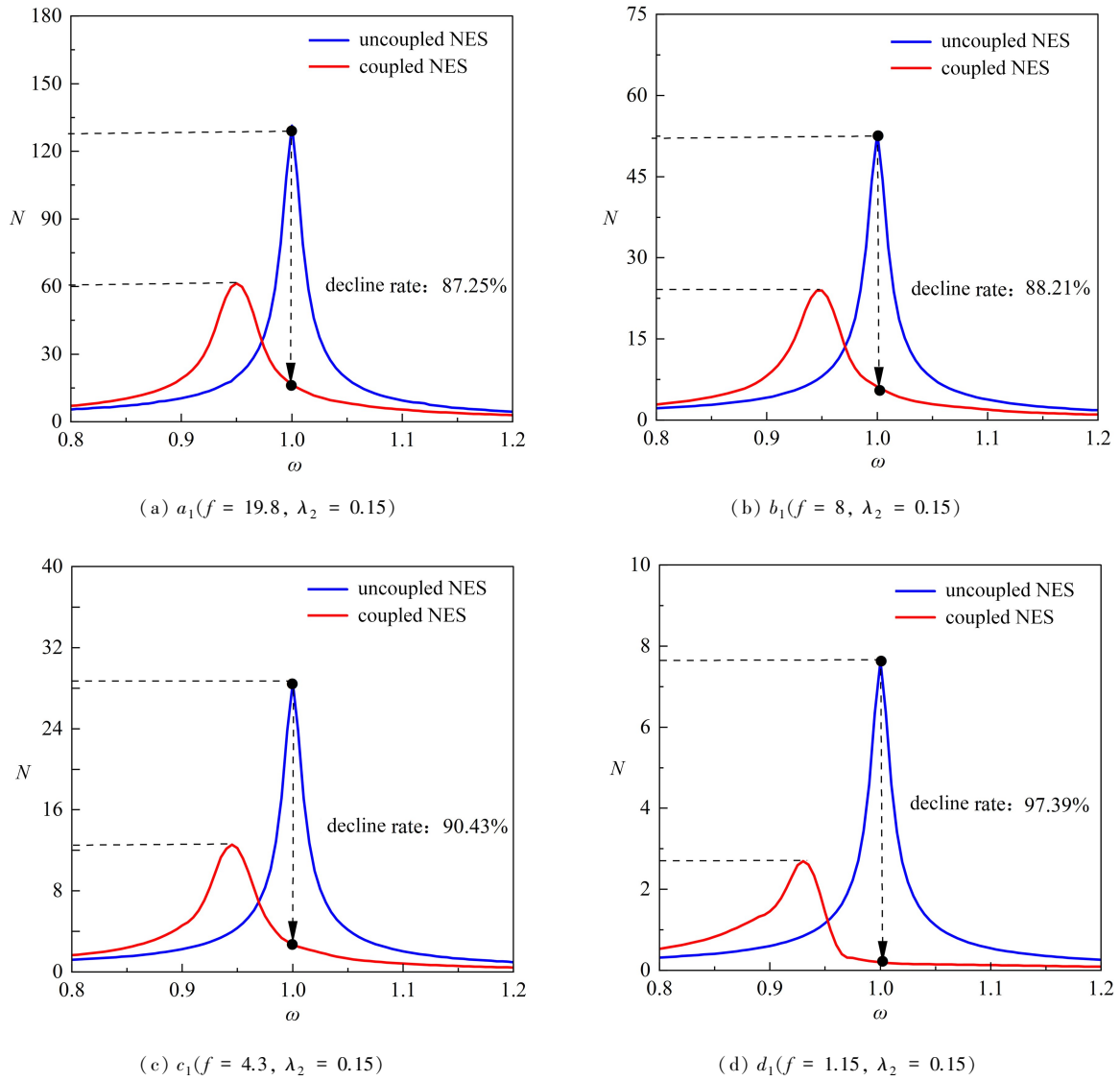
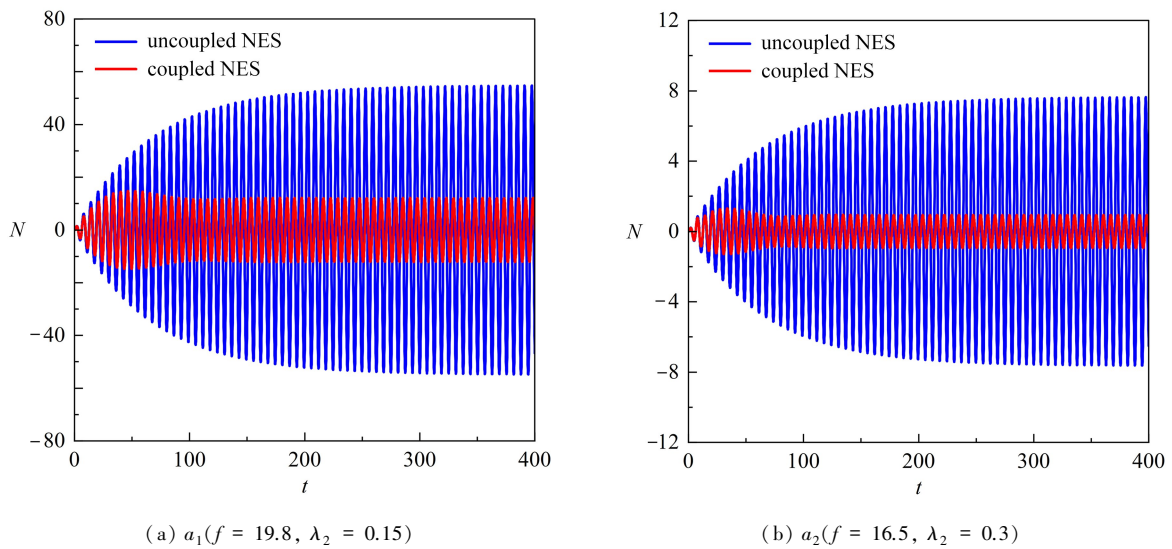


图 8 主结构幅频响应

Fig. 8 Main structural frequency responses



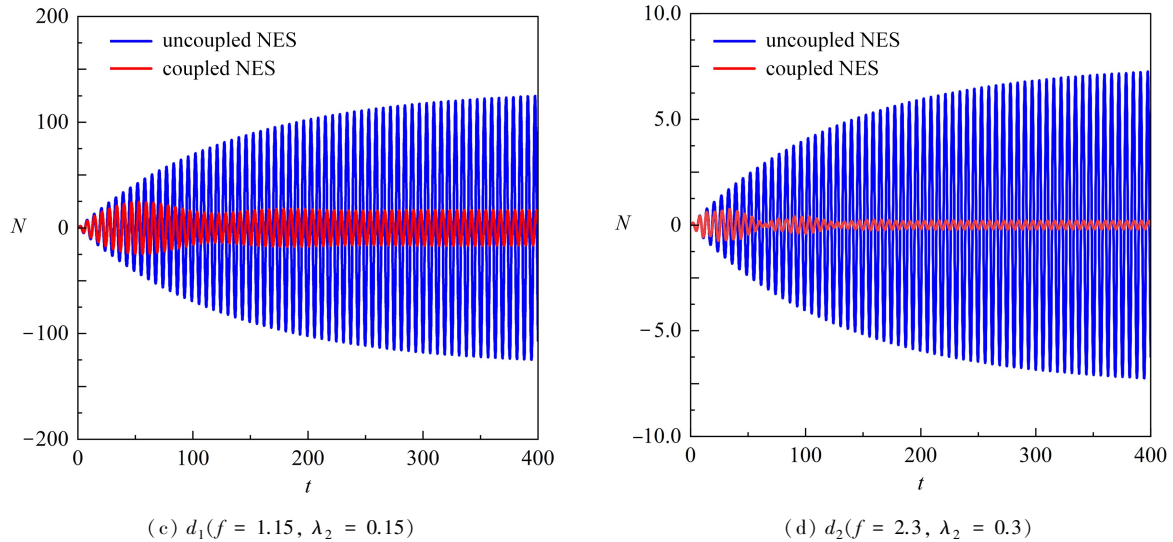


图9 时程图

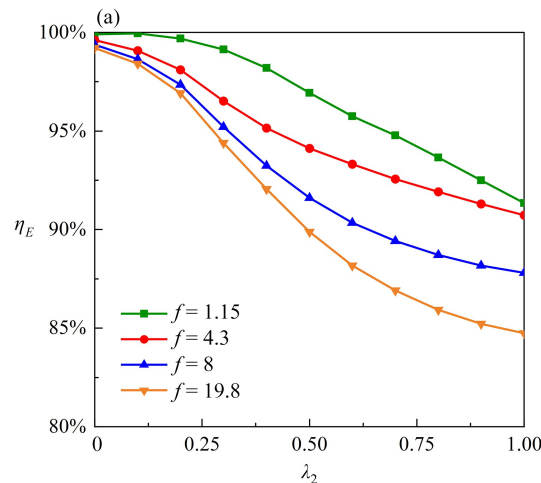
Fig. 9 Time history plots

通过对比分析图 9(a)—9(d) 的时程振动响应可以发现: 当系统进入稳定振动阶段时, A 区域未耦合与耦合能量阱的振幅差均明显小于 D 区域对应的量值. 这表明, A 区域的振动抑制效能明显弱于 D 区域. 进一步针对新增测点 a_2, d_2 进行数值模拟分析可知, 其减振效率分别为 77.99% 和 87.79%. 该差异与前文进行数值模拟后推导的预测结果呈现出良好的一致性, 更加验证了 D 区域作为参数敏感性关键区在能量耗散机制中的主导作用.

继续根据式 (20) 分析 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.15, \alpha_1 = 1.44, \alpha_2 = 3.5$ 时, 阻尼、刚度比、质量比等参数对黏弹性能量阱能量传递效率的影响.

通过对图 10 分析可以发现, 在其他参数相同的情况下, 当外激励幅值持续增大时, 系统的能量传递效率呈现逆向衰减趋势. 值得注意的是, 参数调控对能量传递的影响规律存在显著差异. 如图 10(a) 所示, 在固定激励幅值条件下, 增大阻尼系数不仅无法提升能量传递效率, 反而会削弱能量传递效果, 其最佳参数区间出现在低阻尼区域. 对比分析图 10(b) 和 10(c) 可见, 增大刚度比对能量传递效率具有显著增益效应, 而质量比对系统能量传递效率的影响则呈现先上升后下降的非单调性特征.

基于上述参数响应规律, 黏弹性能量阱的优化设计应遵循以下准则: 优先选择低阻尼系数配置, 采用较大的刚度比参数, 同时将质量比控制在较小优化区间. 这种参数匹配关系可使得能量传递效率最大化, 从而有效提升能量阱系统的减振性能.



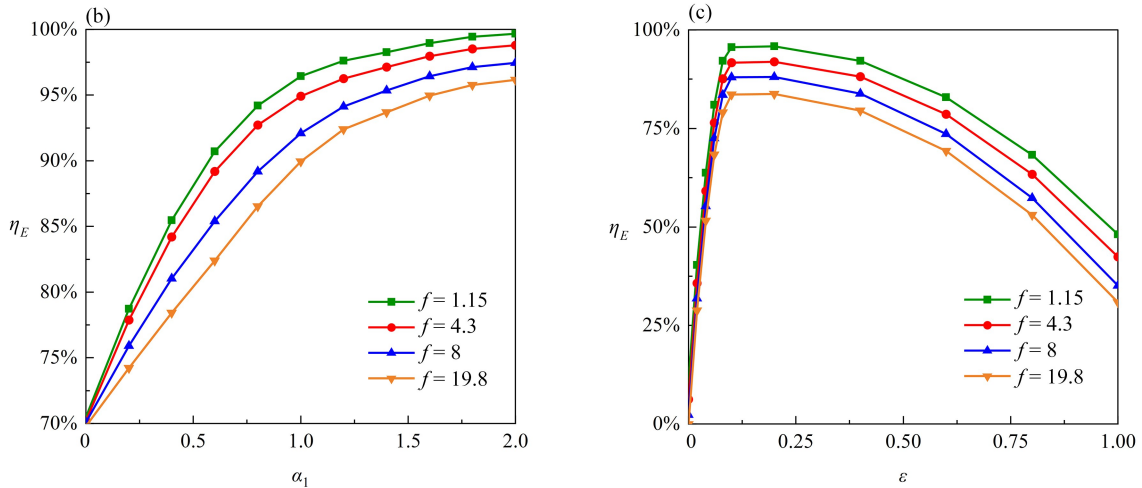


图 10 其他参数对能量传递效率的影响
Fig. 10 Influences of other parameters on the energy transfer efficiency

4 结 论

本文利用黏弹性阻尼来替代传统线性阻尼,对简谐激励下黏弹性 Zener 模型的分岔行为进行研究.文章首先采用复变量平均法推导出系统 1 : 1 共振的慢变方程,然后再深入对系统的分岔行为进行分析.随后以主结构减振效率和能量传递效率为指标,在 MATLAB 中采用 Runge-Kutta 法进行数值模拟,探讨了不同分岔行为对黏弹性能量阱振动抑制性能的影响.

主要结论包括以下几点:

- 1) 从数值模拟得到的图可以看出:黏弹性能量阱能够有效地降低黏弹性系统的振动幅度,且其非线性特性使其能够捕获和耗散来自主结构的振动能量,从而提升系统的整体减振性能.
- 2) 系统发生分岔时,减振效率明显高于未发生分岔的情况.不同分岔类型的减振效果表现各异,具体而言:鞍结分岔单独作用时减振性能最优;鞍结分岔与 Hopf 分岔共同作用时次之;仅有 Hopf 分岔作用时减振效果相对较差,但仍优于无分岔的情况.即鞍结分岔产生三个平衡点区域为非线性能量阱的能量耗散和振动抑制提供了最佳条件,使其减振效果达到最优.
- 3) 从能量传递效率来看,阻尼、刚度比和质量比等参数的变化对系统有着重要影响.在选取参数时应选取阻尼较小,刚度比较大但质量比较小的参数,这样可以有效地优化系统的能量耗散能力并提高减振效率.

附 录

① 方程(7)的系数为

$$r_3 = \frac{9\alpha_1^2(1 + \varepsilon)^2}{64},$$

$$r_2 = \frac{3\alpha_1\alpha_2\lambda_2^2(1 + \varepsilon)^2}{8(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)} - \frac{3(\varepsilon\lambda_1^2(M\varepsilon + 2) - M)}{8(M^2 + \lambda_1^2)} - \frac{3\alpha_1Q}{8},$$

$$r_1 = \frac{\varepsilon^4\lambda_1^2 + Q^2}{4(1 + \varepsilon)^2} + \frac{\varepsilon(\varepsilon^2\lambda_1^2 + 1)(M - \varepsilon\lambda_1^2) + (Q + \varepsilon)(\varepsilon^2\lambda_1^2M + 2\varepsilon\lambda_1^2 - M)}{2(M^2 + \lambda_1^2)(1 + \varepsilon)^2} +$$

$$\frac{\alpha_2\lambda_2(\alpha_2\lambda_1(2M\varepsilon + 1) - (\varepsilon\lambda_1^2(2 + M\varepsilon) - M)\lambda_2 - \alpha_2\varepsilon^2\lambda_1^3)}{2(M^2 + \lambda_1^2)(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)} - \frac{2\alpha_2\lambda_2\left(\left(Q - \frac{(1 + \varepsilon)^2\alpha_2}{2}\right)\lambda_2 - \varepsilon^2\lambda_1\alpha_2\right)}{4(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)},$$

$$r_0 = -\frac{f^2(1 + M\varepsilon)^2}{4(M^2 + \lambda_1^2)},$$

其中 $R = |\psi_2|^2 = N^2$, $M = 2\varepsilon\sigma + 2\sigma + 1$, $Q = 2\varepsilon^2\sigma + 2\varepsilon\sigma + 1$.

② 矩阵(11)中的参数为

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -i\varepsilon\sigma - \frac{i\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon\lambda_1}{2(1+\varepsilon)}, \\
 a_{13} &= \frac{i\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon^2\lambda_1}{2(1+\varepsilon)}, \\
 a_{22} &= i\varepsilon\sigma + \frac{i\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon\lambda_1}{2(1+\varepsilon)}, \\
 a_{24} &= -\frac{i\varepsilon}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon^2\lambda_1}{2(1+\varepsilon)}, \\
 a_{31} &= \frac{i}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon\lambda_1}{2(1+\varepsilon)}, \\
 a_{33} &= -i\varepsilon\sigma + \frac{i}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon^2\lambda_1}{2(1+\varepsilon)} + \frac{3i\alpha_1(1+\varepsilon)|\psi_{20}^2|}{4} + \frac{(1+\varepsilon)\alpha_2\lambda_2(i\lambda_2 - \alpha_2)}{2(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)}, \\
 a_{34} &= \frac{3i\alpha_1(1+\varepsilon)|\psi_{20}^2|}{8}, \\
 a_{42} &= -\frac{i}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon\lambda_1}{2(1+\varepsilon)}, \\
 a_{43} &= -\frac{3i\alpha_1(1+\varepsilon)|\psi_{20}^2|}{8}, \\
 a_{44} &= i\varepsilon\sigma + \frac{i}{2(1+\varepsilon)} - \frac{\varepsilon^2\lambda_1}{2(1+\varepsilon)} - \frac{3i\alpha_1(1+\varepsilon)|\psi_{20}^2|}{4} - \frac{(1+\varepsilon)\alpha_2\lambda_2(i\lambda_2 + \alpha_2)}{2(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)}, \\
 a_{12} &= a_{14} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{41} = 0.
 \end{aligned}$$

③ 方程(12)中的系数为

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 &= \frac{\alpha_2^2\lambda_2(1+\varepsilon)}{\alpha_2^2 + \lambda_2^2}, \\
 \gamma_2 &= \frac{27\alpha_1^2(1+\varepsilon)^2}{64}R^2 - \frac{3\alpha_1((Q - (1+\varepsilon)^2\alpha_2)\lambda_2^2 + Q\alpha_2^2)}{4(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)}R + \\
 &\quad \frac{((1+\varepsilon)^2\alpha_2^2 - 2\alpha_2Q + 8\varepsilon^2\sigma^2 + 4\varepsilon\sigma + 1)\lambda_2^2 + 8\alpha_2^2\left(\varepsilon^2\sigma^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\sigma + \frac{1}{8}\right)}{4(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)}, \\
 \gamma_1 &= \frac{\varepsilon\alpha_2^2\lambda_2(4\varepsilon^2\sigma^2 + 4\varepsilon\sigma + 1)}{4(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)}, \\
 \gamma_0 &= \frac{27\alpha_1^2\varepsilon^2M^2}{256}R^2 - \frac{3\alpha_1\varepsilon^2M((4\varepsilon^2\sigma - 2\varepsilon\sigma + 2\sigma)(\alpha_2^2 + \lambda_2^2) - \alpha_2\lambda_2^2)}{16(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)}R + \\
 &\quad \frac{\varepsilon^2(4\sigma^2(2\varepsilon\sigma + 1)^2(\alpha_2^2 + \lambda_2^2) + 4\sigma^2\alpha_2^2\lambda_2^2(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) - 16\varepsilon\sigma^3\alpha_2\lambda_2^2(1+\varepsilon) + 8\sigma^2\alpha_2^2\lambda_2^2(\varepsilon - 1))}{16(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)} + \\
 &\quad \frac{\varepsilon^2((4\sigma + 1)\alpha_2^2\lambda_2^2 - 16\varepsilon\sigma^2\alpha_2\lambda_2 - 4\sigma\alpha_2\lambda_2^2)}{16(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)},
 \end{aligned}$$

其中 $R = |\psi_2|^2 = N^2$, $M = 2\varepsilon\sigma + 2\sigma + 1$, $Q = 2\varepsilon^2\sigma + 2\varepsilon\sigma + 1$.

④ 方程(15)中的系数为

$$\begin{aligned}
 v_1 &= -\frac{27\varepsilon\alpha_1^2\alpha_2^4\lambda_2^2(1+\varepsilon)^2}{256(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)^2}, \\
 v_2 &= \frac{3\varepsilon\alpha_1\alpha_2^4\lambda_2^2(1+\varepsilon)((4\varepsilon\sigma + 1)(\alpha_2^2 + \lambda_2^2) - \alpha_2\lambda_2^2(1+\varepsilon))}{16(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)^3}, \\
 v_3 &= -\frac{\varepsilon\alpha_2^4\lambda_2^2\left(\lambda_2^2\left(\varepsilon\sigma + \frac{1}{4} - \frac{(1+\varepsilon)\alpha_2}{4}\right)^2 + \alpha_2^2\left(\varepsilon\sigma + \frac{1}{4}\right)^2\right)}{(\alpha_2^2 + \lambda_2^2)^3}.
 \end{aligned}$$

参考文献(References):

- [1] 陆泽琦, 陈立群. 非线性被动隔振的若干进展[J]. 力学学报, 2017, **49**(3): 550-564. (LU Zeqi, CHEN Liqun. Some recent progresses in nonlinear passive isolations of vibrations[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2017, **49**(3): 550-564. (in Chinese))
- [2] 盖盼盼, 徐赵东, 吕令毅, 等. 黏弹性阻尼隔振系统动力分析与优化设计[J]. 振动与冲击, 2019, **38**(1): 238-242. (GAI Panpan, XU Zhaodong, LÜ Lingyi, et al. Dynamic analysis and parametric optimization for vibration isolation systems with viscoelastic damping[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2019, **38**(1): 238-242. (in Chinese))
- [3] WANG X, YAO H, ZHENG G. Enhancing the isolation performance by a nonlinear secondary spring in the Zener model[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, **87**(4): 2483-2495.
- [4] PAWLAK Z M, DENISIEWICZ A. Identification of the fractionalzener model parameters for a viscoelastic material over a wide range of frequencies and temperatures[J]. *Materials*, 2021, **14**(22): 7024.
- [5] YU L, DING W, WU S, et al. Formation mechanism of multistate coexistence and burst oscillation in nonlinearzener model[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2023, **33**(10): 2350117.
- [6] 严巧赞, 丁虎, 陈立群. 黏弹性轴向运动变张力梁非线性动力学[J]. 噪声与振动控制, 2013, **33**(3): 16-20. (YAN Qiaoyun, DING Hu, CHEN Liqun. Nonlinear dynamic behaviors of axially moving viscoelastic beams with varying tensions[J]. *Noise and Vibration Control*, 2013, **33**(3): 16-20. (in Chinese))
- [7] 张运法, 孔宪仁, 岳程斐. 耦合组合刚度非线性能量阱的线性振子动力学分析[J]. 振动与冲击, 2022, **41**(13): 103-111. (ZHANG Yunfa, KONG Xianren, YUE Chengfei. Dynamic analysis of linear oscillator with coupled combined stiffness NES[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2022, **41**(13): 103-111. (in Chinese))
- [8] 姚佳禹. 几何阻尼吸振器对振动压路机驾驶室的振动抑制研究[J]. 建筑机械, 2024(4): 166-172. (YAO Jiayu. Research on vibration suppression of vibration roller cab by geometric damping vibration absorber[J]. *Construction Machinery*, 2024(4): 166-172. (in Chinese))
- [9] 隋鹏, 申永军, 王晓娜. 复变量平均法与其他近似方法的异同[J]. 振动与冲击, 2023, **42**(10): 289-296. (SUI Peng, SHEN Yongjun, WANG Xiaona. Similarities and differences between the complexification-averaging method and other approximation methods[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2023, **42**(10): 289-296. (in Chinese))