

基于有限元和微分求积法的石墨烯等效纳米板动力特性研究*

吴雪彬¹, 白镇滔², 刘秦龙^{1,2}, 李东波^{1,2}

(1. 西安建筑科技大学 理学院, 西安 710055;
2. 西安建筑科技大学 土木工程学院, 西安 710055)

摘要: 非局部连续介质理论能充分考虑材料尺寸效应及微观结构对宏观力学性质的影响, 是一种解决宏微观关联问题的新途径, 但由于其本构关系中嵌入了长程相互作用积分项, 控制方程呈现高阶偏积分-微分方程组特征, 显著提升了计算复杂度. 为此, 本文基于有限元-微分求积(FE-DQ)耦合算法, 提出了一种非局部连续介质理论的求解方法, 并对石墨烯等效纳米板的自由振动特性进行了研究. 结果表明, FE-DQ 数值方法通过分向离散策略将非局部积分-微分方程转化为可解代数系统, 从而极大简化求解过程, 是一种有效的非局部连续介质理论的求解方法. 基于计算结果, 进一步研究了尺寸、非局部参数及振动模态等因素对自由振动频率非局部效应的影响机制. 结果表明, 随着尺寸的增大, 纳米板自由振动频率的非局部效应呈现出逐渐减弱的趋势; 当非局部参数取值逐渐增大, 或者振动模态阶数持续升高时, 自由振动频率的非局部效应会显著增强. 研究成果可为相关领域纳米尺度下结构动力学特性研究提供参考.

关键词: 非局部连续介质理论; FE-DQ 方法; 石墨烯; 等效纳米板; 动力特性

中图分类号: O34 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460048

Dynamic Characteristics Analysis of Equivalent Graphene Nanoplatelets Based on Finite Element and Differential Quadrature Methods

WU Xuebin¹, BAI Zhentao², LIU Qinlong^{1,2}, LI Dongbo^{1,2}

(1. School of Science, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, P.R.China;
2. College of Civil Engineering, Xi'an University of Architecture and Technology, Xi'an 710055, P.R.China)

Abstract: The nonlocal continuum theory effectively integrates microscopic structural features and macroscopic mechanical responses by introducing a cross-scale correlation mechanism, providing a new theoretical paradigm for solving multi-scale mechanical problems. However, due to the incorporation of long-range interaction integral terms in the constitutive relationship, its control equations exhibit the characteristics of high-order par-

* 收稿日期: 2025-03-11; 修订日期: 2025-04-29

基金项目: 国家重点研发计划课题(2023YFF0906001); 国家自然科学基金(52378195; 52008332)

作者简介: 吴雪彬(2000—), 男, 硕士生(E-mail: w2211212321@xauat.edu.cn);

李东波(1982—), 男, 教授, 博士, 博士生导师(通信作者. E-mail: ldb@xauat.edu.cn).

引用格式: 吴雪彬, 白镇滔, 刘秦龙, 李东波. 基于有限元和微分求积法的石墨烯等效纳米板动力特性研究[J]. 应用数学和力学, 2026, 47(4): 415-425.

tial integro-differential equations, and significantly increase the computational complexity. A novel finite element-differential quadrature coupling algorithm (FE-DQ) was established and applied to the study of the free vibration characteristics of graphene equivalent nanoplatelets. Based on the parameterized calculation, the influential mechanisms of key variables such as characteristic sizes and non-local parameters on the non-local effects of buckling loads were revealed through systematic parametric studies. The results show that, the scale effect of buckling loads exhibits a significant nonlinear attenuation characteristic and is positively correlated with the size of the non-local parameter. With the gradual increase of the structural size, the non-local effect on the free vibration frequency will gradually weaken; conversely, with the continuous increase of the non-local parameter value or the rise of the vibration modal order, the non-local effect on the free vibration frequency will intensify significantly. The research provides a reference for the study of structural dynamic characteristics on a nanoscale in related fields.

Key words: dynamic characteristic; FE-DQ method; graphene; equivalent nanoplatelet; nonlocal continuum theory

0 引言

近年来,低维纳米材料在微纳机电系统领域展现出显著应用潜力.碳基纳米材料(如碳纳米管、石墨烯等)因其特有的量子限域效应,在纳米量级呈现突出的固有振动特性^[1].研究表明,单壁碳纳米管的固有频率对质量附加具有灵敏响应,Wood等^[2]通过构建连续介质力学模型,验证了其作为质量传感器的可行性,检测灵敏度达到 10^{-6} fg,为大气微粒监测提供了新方法.通过复合改性工艺将碳纳米管掺入建筑材料,可构建智能结构的健康监测系统.在力学传感方面,碳纳米管的轴向与环向变形会引发特征频率偏移,这为应变场重构提供了理论依据^[3].

实验观测数据^[4]证实,单层石墨烯具有GHz量级的本征振动频率,这为开发超高灵敏度微传感器奠定了物理基础.在理论建模方面,Sakhaee-Pour等^[5]基于分子动力学框架建立了石墨烯质量传感的耦合动力学模型;Li等^[6]构建了应变-频率响应的多尺度关联模型;NASA近期研发的石墨烯基原子尺度传感器,在航天器缺陷检测和大气微量组分分析中取得突破性进展.此外,石墨烯的高频特性在微机械谐振器、量子滤波装置等领域的应用也得到了理论验证^[7-9].

近年来,有限元法(FEM)因其灵活性和广泛适用性,成为解决复杂非局部问题的重要工具.然而,FEM在处理复杂材料性能和非线性问题时面临诸多挑战^[10-13],例如计算成本较高、网格生成困难以及对工程师技能要求较高.相比之下,微分求积法(DQM)通过高精度离散化直接处理微分算子,在规则域中表现出卓越的高阶收敛性,但其在复杂几何边界和低频振动问题中的适应性较差,限制了其在实际工程中的广泛应用^[14].为了平衡计算精度与几何适应性,Bellman和Casti^[15]于1971年提出了DQM的基本框架,此后DQM逐渐与FEM相结合,形成了有限元-微分求积(FE-DQ)方法.FE-DQ方法融合了FEM的几何灵活性与DQM的高效计算性能,成为研究热点.例如,Wang等^[16]通过在一维方向上采用DQM处理微分,同时在其他方向使用FEM的弱形式,成功实现了梁振动问题的高效求解;Tomabene等^[17]则将广义DQM与FEM结合,用于曲面壳结构的非局部振动问题分析.FE-DQ方法在复杂工程问题中的应用展现出显著优势,尤其在计算效率、精度和复杂边界条件处理方面表现突出.与传统方法相比,FE-DQ方法不仅能够有效解决非局部积分型本构关系中的长程相关问题,还能在多参数分析中提供更高的计算性能与精度.这一方法为非局部理论框架下的复杂问题求解开辟了新的可能性,逐步发展为解决多尺度力学问题的重要工具.

针对纳米材料力学行为的尺度效应建模问题,传统连续介质理论未充分解决积分项离散的精度与效率平衡问题,存在本征局限性.非局部弹性理论通过引入积分型本构关系,有效刻画了微观结构对宏观力学响应的长程关联效应^[18].然而,该理论框架中体积分项的存在导致控制方程呈现强非线性特征,传统解析方法面临收敛性挑战^[19].本文基于Hamilton变分原理,建立了考虑非局部效应的石墨烯等效纳米板振动控制方程,提出FE-DQ耦合算法,通过构造插值形函数实现积分项的数值离散化处理.重点研究了几何参数、非局部核函数特征长度、模态阶次等参数对振动频谱的影响规律,建立了频率偏移量与材料参数的定量关联模

型.研究成果为微纳谐振器的优化设计提供了理论支撑,在航天器结构健康监测、高精度环境传感等领域具有重要工程应用价值.

1 考虑非局部效应的石墨烯等效纳米板自由振动控制微分方程

1.1 FE-DQ 混合法

在板壳结构力学领域的研究进程中,FE-DQ 混合法精妙地融合了 FEM 与 DQM 二者的核心算法优势^[19],构建起一种全新的数值求解体系.该方法的核心机理在于对空间变量的分向离散策略:沿一个坐标方向实施 FEM 弱形式离散,另一方向采用 DQM 强形式离散.该混合策略具有以下数学特性与工程优势:

- ① 降维计算优势:仅在单坐标方向构建 FEM 离散,将二维平板问题退化为等效梁单元组合系统.
- ② 高阶收敛特性:沿 DQM 离散方向采用高精度配点格式,较等节点数 FEM 具有更优的数值收敛性.
- ③ 边界条件强约束能力:通过 DQM 方向直接施加 Dirichlet 边界条件,避免 FEM 中弱边界处理的附加自由度约束.

④ 多域问题普适性:基于 FEM 方向构建的梁单元拓扑结构,可自然拓展至多跨连续板系统分析.通过引入节点自由度耦合矩阵,实现跨间位移协调条件的自动满足,适用于复杂支撑条件下的屈曲与振动模式分析.

FE-DQ 方法的数值实施流程可分解为三个阶段:

- ① 基于虚功原理建立平板控制方程的弱形式,沿 $x-x$ 方向划分单元并构造 Hermite 插值形函数,将二维偏微分方程转化为沿 $y-y$ 方向的一维微分方程组.
- ② 在 $y-y$ 方向布置 N 个 Chebyshev-Lobatto 配点,利用加权残差法将微分方程组离散为代数方程组.
- ③ 求解代数方程组得到特征值.

该方法成功克服了传统 DQM 处理复杂几何的局限性,同时规避了纯 FEM 计算量随维度指数增长的缺陷,为微纳板壳结构的多物理场耦合分析提供了高效数值工具.

1.2 石墨烯等效连续介质模型

基于连续介质力学建模理论,石墨烯可被等效为线弹性、均匀的且各向同性的矩形薄板模型^[20](如图 1 所示).设其长度和宽度分别为 l 和 b ,厚度为 h .

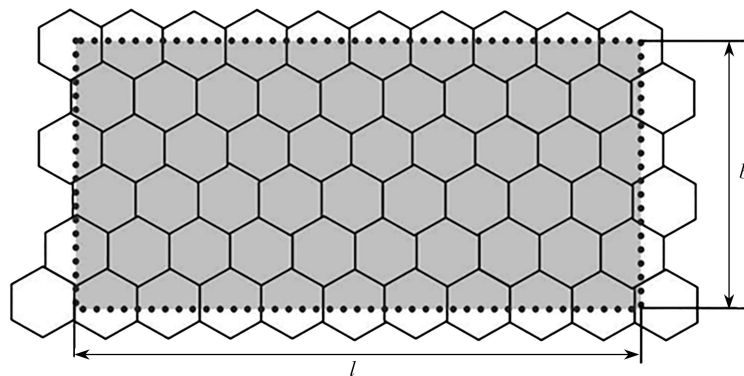


图 1 石墨烯等效的纳米薄板

Fig. 1 The equivalent graphene nanoplatelet

在微观尺度下,基于非局部连续介质理论,材料的本构方程^[21-23]为

$$N_{xx} - (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 N_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{xx}}{\partial y^2} \right) = C \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tag{1a}$$

$$N_{yy} - (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 N_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{yy}}{\partial y^2} \right) = C \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tag{1b}$$

$$N_{xy} - (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial y^2} \right) = C \frac{1 - \mu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right), \tag{1c}$$

$$M_{xx} - (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad (1d)$$

$$M_{yy} - (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} \right) = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (1e)$$

$$M_{xy} - (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y^2} \right) = -D(1 - \mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (1f)$$

其中, N_{xx}, N_{yy} 和 N_{xy} 为面内力合量; $e_0 a$ 为非局部效应参数; M_{xx}, M_{yy} 和 M_{xy} 分别为纳米板在面内 x, y 和横向方向上单位长度的内部力矩; μ 为材料的 Poisson 比; u, v 和 w 分别为纳米板在面内 x, y 和横向方向上的挠度; C 和 D 分别为薄板面内刚度和薄板弯曲刚度:

$$C = \frac{Eh}{1 - \mu^2}, \quad (2a)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}. \quad (2b)$$

当非局部效应参数 $e_0 a = 0$ 时, 本构方程(1)即为经典各向同性线弹性体的应力-应变关系. 依据 Kirchhoff-Love 薄板假设, 通过 Hamilton 变分原理建立等效纳米板的动态平衡方程:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = m_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (3a)$$

$$\frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = m_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (3b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{yy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (3c)$$

其中, q 为横向均布载荷, ρ 为面质量密度, m_0 为薄板每单位面积内的质量.

针对自由振动问题, 设定外载荷条件 $q = 0$, 但纳米板在振动前已承受预紧力状态, 此时 x 方向上的面内均布静态轴向载荷为 N^0 . 则等效纳米板的外力为

$$N_{xx} = N^0, N_{yy} = \mu N^0, N_{xy} = 0. \quad (4)$$

将本构方程(1a)–(1f)与横向振动方程(3c)进行整合, 通过张量运算得到等效纳米板的自由振动控制方程为

$$\begin{aligned} & D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + N^0 \left[(e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (1 + \mu) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \mu \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) \right] - \\ & \rho h (e_0 a)^2 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = N^0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

2 石墨烯等效纳米板自由振动频率的 FE-DQ 求解方法

由于方程(5)中非局部核函数的存在, 控制方程呈现空间卷积积分项, 导致传统解析方法存在闭合解构造障碍. 对此, 基于 FE-DQ 方法, 本文提出一种非局部连续介质理论下石墨烯等效纳米板自由振动频率的计算方法.

2.1 控制微分方程的 FEM 化

基于 FE-DQ 方法的基本原理, 将复杂的二维问题简化为一系列一维问题进行处理. 因此, 在将纳米板划分为有限单元时, 由于 Hermite 梁单元能够同时考虑位移和转角, 使得在有限单元划分时能够更准确地描述纳米板的变形特性, 同时, 减少未知数的数量, 提高计算效率. 此外, 在薄板理论中, 纳米板的挠度变形是主要的关注点. Hermite 梁单元通过三次 Hermite 多项式逼近位移场, 能够很好地捕捉到挠度变形的细节, 从而适

用于纳米板的自由振动分析。

为此,沿 x 轴将纳米板划分为 n 个 Hermite 梁单元,具体过程为:

① 单元划分:沿纳米板的 x 轴方向,将其划分为 n 个 Hermite 梁单元.每个单元长度可以根据实际情况进行调整,以确保计算准确性和效率。

② 位移场逼近:在每个 Hermite 梁单元内,采用三次 Hermite 多项式来逼近位移场.该多项式由四个未知参数确定,分别对应单元两个端点的位移和转角.通过求解这些未知参数可得到纳米板的整体变形情况。

③ 代入控制方程:将位移场的逼近表达式代入到非局部控制方程中,可得到一个关于未知参数的代数方程组.通过求解该方程组,即可得到纳米板的自由振动频率和振动模式。

根据上述过程,每个梁单元内的位移场采用三次 Hermite 多项式逼近:

$$W^e(x, y, t) = \sum_{j=1}^4 W_j^e(y, t) \phi_j^e(x), \quad (6)$$

其中, $W_j^e(y, t)$ 表示第 e 个有限元的节点值, $\phi_j^e(x)$ 表示 Hermite 三次插值函数,用于构建单元内位移场的连续表示,确保位移场在单元边界处的连续性.三次 Hermite 多项式具有四个未知参数分别代表单元两个端点的位移和转角,能够充分反映单元内的位移变化,故 j 取 $1 \sim 4$. $j=1$ 时通常对应第一个端点的某个位移或转角参数; $j=4$, 对应最后一个(或第二个端点的)位移或转角参数; $j=2, 3$, 则代表中间过渡的插值参数,确保位移场在单元内平滑变化。

将方程(6)代入非局部控制方程(5)中,可得

$$\begin{aligned} & D \left[\sum_{j=1}^4 W_j^e(y, t) \frac{\partial^4 \phi_j^e(x)}{\partial x^4} + 2 \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 W_j^e(y, t)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^4 W_j^e(y, t)}{\partial y^4} \phi_j^e(x) \right] + \\ & N^0 \left[(e_0 a)^2 \left(\sum_{j=1}^4 W_j^e(y, t) \frac{\partial^4 \phi_j^e(x)}{\partial x^4} + (1 + \mu) \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 W_j^e(y, t)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \mu \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^4 W_j^e(y, t)}{\partial y^4} \phi_j^e(x) \right) \right] - \\ & \rho h (e_0 a)^2 \left(\sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 W_j^e(y, t)}{\partial t^2} \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^4 W_j^e(y, t)}{\partial y^2 \partial t^2} \phi_j^e(x) \right) = \\ & N^0 \left(\sum_{j=1}^4 W_j^e(y, t) \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} + \mu \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 W_j^e(y, t)}{\partial y^2} \phi_j^e(x) \right). \quad (7) \end{aligned}$$

然后将所得方程(7)两边同时乘以 $\phi_i^e(x)$, 并沿着第 e 个有限元长度 ($x_e \leq x \leq x_{e+1}$) 进行积分,可得

$$\begin{aligned} & D \left[\int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \frac{\partial^4 \phi_j^e(x)}{\partial x^4} dx \sum_{j=1}^4 W_j^e(y, t) + 2 \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} dx \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 W_j^e(y, t)}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \phi_j^e(x) dx \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^4 W_j^e(y, t)}{\partial y^4} \right] + N^0 \left[(e_0 a)^2 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \frac{\partial^4 \phi_j^e(x)}{\partial x^4} dx \sum_{j=1}^4 W_j^e(y, t) + \right. \right. \\ & \left. \left. (1 + \mu) \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} dx \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 W_j^e(y, t)}{\partial y^2} + \mu \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \phi_j^e(x) dx \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^4 W_j^e(y, t)}{\partial y^4} \right) \right] - \\ & \rho h (e_0 a)^2 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} dx \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^2 W_j^e(y, t)}{\partial t^2} + \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \phi_j^e(x) dx \sum_{j=1}^4 \frac{\partial^4 W_j^e(y, t)}{\partial y^2 \partial t^2} \right) = \\ & N^0 \left(\int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} dx \sum_{j=1}^4 W_j^e(y, t) + \mu \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \phi_j^e(x) dx \frac{\partial^2 W_j^e(y, t)}{\partial y^2} \right). \quad (8) \end{aligned}$$

将式(8)进行整理,可得

$$\begin{aligned} & D \left(A^e W^e + 2B^e \frac{\partial^2 W^e}{\partial y^2} + C^e \frac{\partial^4 W^e}{\partial y^4} \right) + \\ & N^0 \left[(e_0 a)^2 \left(A^e W^e + (1 + \mu) B^e \frac{\partial^2 W^e}{\partial y^2} + \mu C^e \frac{\partial^4 W^e}{\partial y^4} \right) \right] - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \rho h (e_0 a)^2 \left(B^e \frac{\partial^2 W^e}{\partial t^2} + C^e \frac{\partial^4 W^e}{\partial y^2 \partial t^2} \right) = \\ & N^0 \left(B^e W^e + \mu C^e \frac{\partial^2 W^e}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned} A^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \frac{\partial^4 \phi_j^e(x)}{\partial x^4} dx = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{\partial^2 \phi_i^e(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} dx + \left[\phi_i^e(x) \frac{\partial^3 \phi_j^e(x)}{\partial x^3} - \frac{\partial \phi_i^e(x)}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} \right]_{x_e}^{x_{e+1}}, \\ B^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \frac{\partial^2 \phi_j^e(x)}{\partial x^2} dx = - \int_{x_e}^{x_{e+1}} \frac{\partial \phi_i^e(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j^e(x)}{\partial x} dx + \left[\phi_i^e(x) \frac{\partial \phi_j^e(x)}{\partial x} \right]_{x_e}^{x_{e+1}}, \\ C^e &= \int_{x_e}^{x_{e+1}} \phi_i^e(x) \phi_j^e(x) dx. \end{aligned}$$

组合有限元方程(9),加入对应边界条件,得到类似于一维梁单元的控制微分方程:

$$\begin{aligned} & A\mathbf{W} + 2B \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial y^2} + C \frac{\partial^4 \mathbf{W}}{\partial y^4} + \frac{N^0}{D} \left[(e_0 a)^2 \left(A\mathbf{W} + (1 + \mu)B \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial y^2} + \mu C \frac{\partial^4 \mathbf{W}}{\partial y^4} \right) \right] - \\ & \frac{\rho h}{D} (e_0 a)^2 \left(B \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial t^2} + C \frac{\partial^4 \mathbf{W}}{\partial y^2 \partial t^2} \right) = \\ & \frac{N^0}{D} \left(B\mathbf{W} + \mu C \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

针对方程(10)所表征的四阶耦合偏微分系统,可利用DQM^[24]将偏导数项离散为代数形式,基于Newmark方法求解常微分方程组,具体求解过程见下文.

2.2 FEM公式化后偏微分方程组的DQ替代方程组

根据DQM,设位移场函数 $\mathbf{W}(y)$ 在 y 方向离散为 m 个样本点,其高阶偏导数通过微分矩阵可近似表示为^[25]

$$\frac{\partial^r \mathbf{W}(y_i, t)}{\partial y^r} = \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_{ij}^{(r)} \mathbf{W}(y_j, t), \quad (11)$$

其中, $\mathbf{H}_{ij}^{(r)}$ ($r = 2, 4$) 表示 r 阶微分权重矩阵, $\mathbf{W}(y_j)$ 表示样本点 y_j 的节点值.

对于 y 方向的样本点,选用广泛应用的Gauss-Chebyshev-Lobatto^[26]点分布方法来选取:

$$y_j = \frac{1}{2} \left[1 - \cos \left(\frac{j-1}{M-1} \pi \right) \right], \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (12)$$

方程(10)可适应任意样本点 $y = y_j$, 即

$$\begin{aligned} & A\mathbf{W}(y_i, t) + 2B \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_{ij}^{(2)} \mathbf{W}(y_j, t) + C \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_{ij}^{(4)} \mathbf{W}(y_j, t) + \\ & \frac{N^0}{D} \left[(e_0 a)^2 \left(A\mathbf{W}(y_i, t) + (1 + \mu)B \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_{ij}^{(2)} \mathbf{W}(y_j, t) + \mu C \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_{ij}^{(4)} \mathbf{W}(y_j, t) \right) \right] - \\ & \frac{\rho h}{D} (e_0 a)^2 \left(B\ddot{\mathbf{W}}(y_i, t) + C \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_{ij}^{(4)} \ddot{\mathbf{W}}(y_j, t) \right) = \\ & \frac{N^0}{D} \left(B\mathbf{W}(y_i, t) + \mu C \sum_{j=1}^m \mathbf{H}_{ij}^{(2)} \mathbf{W}(y_j, t) \right), \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (13)$$

由方程(13)集成得到

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{W}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{W}} = \frac{N^0}{D} \tilde{\mathbf{E}}\tilde{\mathbf{W}}, \quad (14)$$

其中, $N \times N$ 阶的子矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}_{ij}$, $\tilde{\mathbf{K}}_{ij}$ 和 $\tilde{\mathbf{E}}_{ij}$ 为

$$\tilde{\mathbf{M}}_{ij} = -\frac{\rho h}{D} (e_0 a)^2 (\mathbf{I}_{ij} B + \mathbf{H}_{ij}^{(4)} C),$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{ij} = \mathbf{I}_{ij}A + 2\mathbf{H}_{ij}^{(2)}B + \mathbf{H}_{ij}^{(4)}C + \frac{N^0}{D}[(e_0a)^2(\mathbf{I}_{ij}A + (1 + \mu)\mathbf{H}_{ij}^{(2)}B + \mathbf{H}_{ij}^{(4)}C)],$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_{ij} = \mathbf{I}_{ij}B + \mu\mathbf{H}_{ij}^{(2)}C,$$

其中, \mathbf{I}_{ij} 为 $m \times m$ 阶的单位矩阵, $\mathbf{0}$ 为 N 阶零矩阵, 且

$$\tilde{\mathbf{W}} = [\mathbf{W}^T(y_1, t) \quad \mathbf{W}^T(y_2, t) \quad \cdots \quad \mathbf{W}^T(y_m, t)]^T,$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{W}}} = [\ddot{\mathbf{W}}^T(y_1, t) \quad \ddot{\mathbf{W}}^T(y_2, t) \quad \cdots \quad \ddot{\mathbf{W}}^T(y_m, t)]^T.$$

方程(14)中, $\tilde{\mathbf{M}}$ 为等效纳米板的总质量矩阵, $\tilde{\mathbf{K}}$ 为等效纳米板的总刚度矩阵, 以 $\tilde{\mathbf{E}}$ 矩阵形式显示所得结果代数式中面内力的影响. 当 $\tilde{\mathbf{W}}$ 为 $N_m \times 1$ 阶向量时, 矩阵 $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{K}}, \tilde{\mathbf{E}}$ 均为 $N_m \times N_m$ 阶矩阵, 则方程(14)可进一步表示为

$$\tilde{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{W}}} + \tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{0}, \tag{15}$$

其中, $\bar{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}} - \frac{N^0}{D}\tilde{\mathbf{E}}$.

将边界条件代入方程(15)中可得以下代数方程组:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_{4N \times 4N} & \mathbf{0}_{4N \times N(m-4)} \\ \mathbf{0}_{N(m-4) \times 4N} & \tilde{\mathbf{M}}_{ddN(m-4) \times N(m-4)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\tilde{\mathbf{W}}}_b \\ \ddot{\tilde{\mathbf{W}}}_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{K}}_{bb} & \bar{\mathbf{K}}_{bd} \\ \bar{\mathbf{K}}_{bd} & \bar{\mathbf{K}}_{dd} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{W}}_{b4N \times 1} \\ \tilde{\mathbf{W}}_{dN(m-4) \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0}_{4N \times 1} \\ \mathbf{0}_{dN(m-4) \times 1} \end{Bmatrix}, \tag{16}$$

其中, 下标 b 和 d 分别表示边界条件和控制微分方程在使用微分求积公式表示时所取的网格点数.

将方程(16)中消去 $(4N \times 1)$ 列向量 $\tilde{\mathbf{W}}_b$, 可简化为以下的常微分方程组:

$$\hat{\mathbf{M}}\ddot{\tilde{\mathbf{W}}}_d + \hat{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{W}}_d = \mathbf{0}, \tag{17}$$

式中, $\hat{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}}_{dd}$, $\hat{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{K}}_{dd} - \bar{\mathbf{K}}_{db}\bar{\mathbf{K}}_{bb}^{-1}\bar{\mathbf{K}}_{bd}$. 利用 Newmark 方法即可对方程(17)进行求解.

根据振动理论, 平板的简谐振动解可表示为

$$\tilde{\mathbf{W}}_d(t) = \tilde{\mathbf{W}}_d \exp(i\omega t). \tag{18}$$

将方程(18)代入方程(17)可得如下的一般特征值问题:

$$\hat{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{W}}_d = \omega^2 \hat{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{W}}_d. \tag{19}$$

显然, 方程(19)的特征值即为石墨烯等效纳米板的自由振动频率, 最小特征值即为石墨烯等效纳米板的基准频率.

3 石墨烯等效纳米板自由振动非局部效应影响因素分析

为量化非局部效应对石墨烯等效纳米板自由振动的影响, 定义自由振动频率比为

$$\bar{\omega}_r = \frac{\omega_{\text{nonlocal}}}{\omega_{\text{local}}}, \tag{20}$$

其中, ω_{nonlocal} 为石墨烯等效纳米板的非局部自由振动频率, ω_{local} 为石墨烯等效纳米板的局部(经典)自由振动频率.

当自由振动频率比为 1 时, 系统退化为局部连续介质模型, 无非局部效应; 自由振动频率比偏离 1 越多, 非局部效应越明显.

本研究通过参数化敏感性分析, 建立了石墨烯等效纳米板的尺寸、非局部参数、振动模态阶数等多因素耦合影响模型.

3.1 尺寸影响

针对尺寸影响, 设定非局部参数 e_0a 为 0 nm 和 2 nm, 固定等效纳米板宽为 25 nm, z 方向板厚为石墨烯厚度 0.34 nm, 弹性模量为 1.06 TPa, Poisson 比为 0.25, 质量密度为 2 250 kg/m³. 令板长 $l \in [5, 50]$ nm, 按步长 $\Delta l = 5$ nm 递增, 取 x 方向的有限单元个数 n 和 y 方向的节点数 m 均为 15, 分析自由振动频率比的演化规律, 如图 2 所示.

由图2可见,当非局部参数 $e_0a = 0.0 \text{ nm}$ 时,自由振动频率比等于1,此时本构方程退化为局部弹性模型,尺寸效应消失.当非局部参数 $e_0a = 2.0 \text{ nm}$ 时,所有尺寸等效纳米版的自由振动频率都小于1,定量表征非局部效应引起的等效刚度折减.

此外,随着尺寸持续增大,自由振动频率比呈现收敛特性,当尺寸足够大至超过某一限值时,非局部效应的影响可以忽略.而尺寸越小,自由振动频率偏离1的程度越大,非尺寸效应越明显.

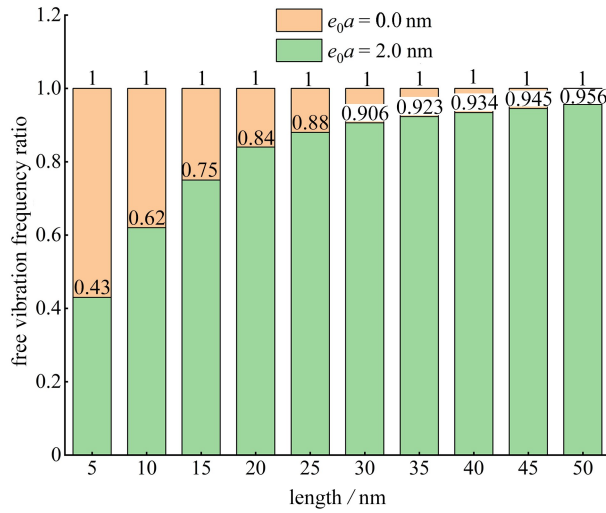


图2 不同尺寸下石墨烯等效纳米板自由振动频率比变化柱状图

Fig. 2 The bar chart of free vibration frequency ratio variations for equivalent graphene nanoplatelets under different sizes

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

3.2 非局部参数影响

基于非局部连续介质理论,研究非局部参数对石墨烯纳米板振动特性的影响规律.选取非局部参数为 $0.0 \text{ nm}, 0.5 \text{ nm}, 1.0 \text{ nm}, 1.5 \text{ nm}$ 和 2.0 nm 进行参数化数值分析,获得等效纳米板自由振动频率比的演化曲线,如图3所示.

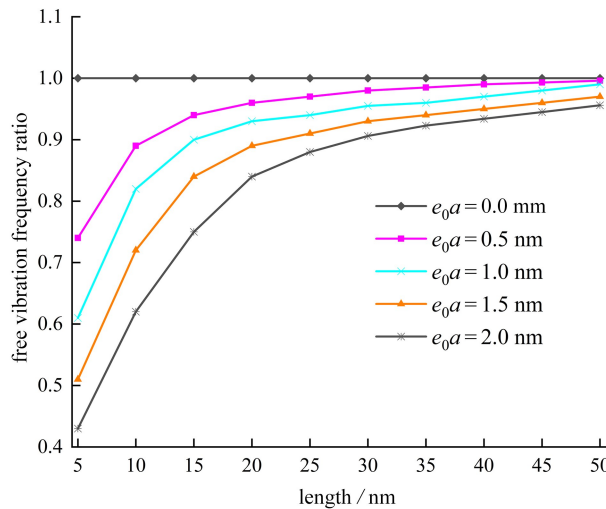


图3 不同非局部参数下石墨烯等效纳米板自由振动频率比变化曲线图

Fig. 3 The plot of free vibration frequency ratio variations for equivalent graphene nanoplatelets under different nonlocal parameters

由图3可见,非局部参数不为0时的自由振动频率比 $\bar{\omega}_r$ 均小于1,即非局部效应的临界荷载均小于局部效应的临界荷载.非局部参数越大,非局部自由振动频率与局部自由振动频率相差越大,非局部效应越大.

当非局部参数 $e_0 a = 0.0 \text{ nm}$ 时,自由振动频率比 $\bar{\omega}_r$ 等于 1,此时本构方程退化为局部弹性模型(与 3.1 小节结论相同);当 $e_0 a \neq 0.0 \text{ nm}$ 时,自由振动频率比 $\bar{\omega}_r$ 小于 1,即考虑非局部效应的临界荷载小于局部(经典)效应的临界荷载.随着非局部参数的增大,自由振动频率比 $\bar{\omega}_r$ 逐渐减小,非局部效应更加明显.

3.3 振动模态阶数影响

基于模态敏感性的非局部效应分析表明,石墨烯纳米板的振动频谱特性呈现显著模态依赖性.故在不同振动模态下,分别对非局部理论和局部理论框架下的等效纳米板展开自由振动频率分析,计算前 4 阶(1 阶、2 阶、3 阶、4 阶)振型下等效纳米板的自由振动频率比,成功获取了能够直观反映不同振动模态下石墨烯等效纳米板自由振动频率变化趋势的曲线,如图 4 所示.

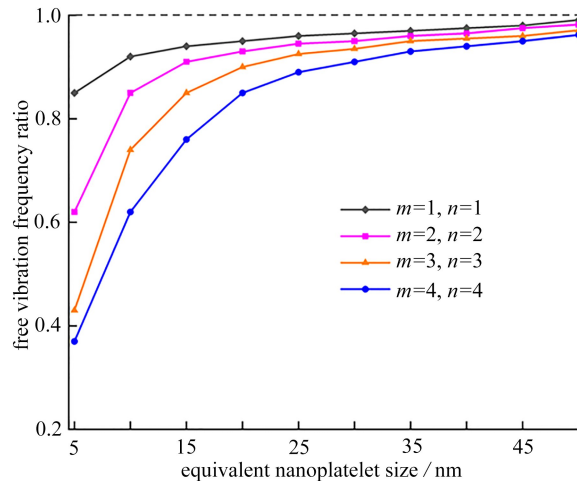


图 4 不同振动模态下石墨烯等效纳米板自由振动频率变化曲线

Fig. 4 The plot of free vibration frequency variation curves for equivalent graphene nanoplatelets under different vibration modes

在所有阶数下,等效纳米板的自由振动频率比始终小于 1,即相较于局部理论,非局部理论框架下的纳米板自由振动频率更低.自由振动频率比随尺寸增大而增大,逐渐趋于定值 1,当纳米板尺寸超过某一限值时,非局部效应可忽略.

此外,自由振动频率比随模数增大逐渐变小,即模数越大,非局部效应的自由振动频率偏离局部效应的自由振动频率的程度越大,非局部效应越明显.

3.4 FE-DQ 方法准确性讨论

FE-DQ 混合法在求解非局部连续介质问题时,相较于传统数值方法和解析方法,展现出显著的先进性与适用性.具体为:

针对非局部本构关系中积分-微分方程的高维耦合特性,传统 FEM 需通过精细网格离散非局部核函数,导致计算效率低下且易产生边界误差;而纯 DQM 虽具有节点离散的高精度优势,却难以适应复杂几何边界. FE-DQ 通过局部域内采用微分求积格式离散非局部积分项,全局域内保留有限单元法的形函数插值,既规避了纯 FEM 对高阶连续性逼近的局限性,又降低了纯 DQM 对节点均匀分布的要求.

相比于解析方法依赖特定核函数形式和简化边界条件的局限性,该混合法通过分域离散策略,可灵活处理任意非局部核函数及非规则几何边界问题,且在应变梯度、尺寸效应等非局部特征显著的区域表现出更优的收敛稳定性.算例研究表明,该方法在保持与解析解一致性的同时,计算耗时较传统 FEM 大幅降低,为工程尺度下非局部连续介质的多场耦合分析提供了高效高精度的数值工具.

综上,通过与传统的 FEM 和 DQM 对比,本文提出的 FE-DQ 方法求解非局部连续介质问题在计算效率和准确性方面具有显著优势,可为非局部理论在实际工程中的应用提供一种更有效的数值工具.

4 结 论

本文针对非局部连续介质理论中控制方程难以求解的问题,基于 FE-DQ 耦合算法,提出一种非局部连

续介质理论的求解方法,并对石墨烯等效纳米板的自由振动特性进行研究,揭示了石墨烯纳米板自由振动的跨尺度力学特性,主要取得以下结论:

1) FE-DQ 耦合算法通过分向离散策略将非局部积分-微分方程转化为可解代数系统,从而极大简化求解过程,是一种有效的非局部连续介质理论的求解方法。

2) 在不同条件下,石墨烯等效纳米板由于非局部效应,其自由振动比均小于 1,即非局部连续介质理论下的自由振动频率均小于局部(经典)理论下的自由振动频率。尺寸越小,自由振动频率所受非局部效应越明显,当尺寸超过某一限值时,非局部效应可忽略不计。

3) 局部参数为 0 时,本构方程退化为局部弹性模型,自由振动频率随非局部参数增大其非局部效应越明显。高阶模态的频率偏移量显著高于低阶模态,高阶振动模态对材料微观结构更为敏感。

4) FE-DQ 方法在处理非局部结构振动问题时,具有更高的计算准确性,为非局部理论在实际工程中的应用提供了一种更有效的数值工具。

参考文献(References):

- [1] PONCHARAL P, WANG Z L, UGARTE D, et al. Electrostatic deflections and electromechanical resonances of carbon nanotubes[J]. *Science*, 1999, **283**(5407): 1513-1516.
- [2] WOOD J R, WAGNER H D. Single-wall carbon nanotubes as molecular pressure sensors[J]. *Applied Physics Letters*, 2000, **76**(20): 2883-2885.
- [3] LI C, CHOU T W. Single-walled carbon nanotubes as ultrahigh frequency nanomechanical resonators[J]. *Physical Review B*, 2003, **68**(7): 073405.
- [4] BUNCH J S, VAN DER ZANDE A M, VERBRIDGE S S, et al. Electromechanical resonators from graphene sheets[J]. *Science*, 2007, **315**(5811): 490-493.
- [5] SAKHAE-POUR A, AHMADIAN M T, NAGHDABADI R. Vibrational analysis of single-layered graphene sheets[J]. *Nanotechnology*, 2008, **19**(8): 085702.
- [6] LI C Y, CHOU T W. Strain and pressure sensing using single-walled carbon nanotubes[J]. *Nanotechnology*, 2004, **15**(11): 1493-1496.
- [7] LOS SANTOS H J. *Introduction to Micromechanical Microwave Systems*[M]. London: Artech House, 1993.
- [8] GRAHAM D, THOMPSON D G, SMITH W E, et al. Control of enhanced Raman scattering using a DNA-based assembly process of dye-coded nanoparticles[J]. *Nature Nanotechnology*, 2008, **3**: 548-551.
- [9] CORREAS-SERRANO D, GOMEZ-DIAZ J S, PERRUISSEAU-CARRIER J, et al. Graphene-based plasmonic tunable low-pass filters in the terahertz band[J]. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 2014, **13**(6): 1145-1153.
- [10] PINGULKAR P, SURESHA B. Free vibration analysis of laminated composite plates using finite element method[J]. *Polymers and Polymer Composites*, 2016, **24**(7): 529-538.
- [11] VINYAS M. A higher-order free vibration analysis of carbon nanotube-reinforced magneto-electro-elastic plates using finite element methods[J]. *Composites (Part B): Engineering*, 2019, **158**: 286-301.
- [12] CHEN M, JIN G, YE T, et al. An isogeometric finite element method for the in-plane vibration analysis of orthotropic quadrilateral plates with general boundary restraints[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, **133**: 846-862.
- [13] 李情, 陈莘莘. 基于重构边界光滑离散剪切间隙法的复合材料层合板自由振动分析[J]. 应用数学和力学, 2022, **43**(10): 1123-1132. (LI Qing, CHEN Shenshen. Free vibration analysis of laminated composite plates based on the reconstructed edge-based smoothing DSG method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2022, **43**(10): 1123-1132. (in Chinese))
- [14] WANG Y, FENG C, YANG J, et al. Nonlinear vibration of FG-GPLRC dielectric plate with active tuning using differential quadrature method[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2021, **379**: 113761.
- [15] BELLMAN R, CASTI J. Differential quadrature and long-term integration[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1971, **34**(2): 235-238.

- [16] WANG X, BERT C W. A new approach in applying differential quadrature to static and free vibrational analyses of beams and plates[J]. *Journal of Sound Vibration*, 1993, **162**(3): 566-572.
- [17] TORNABENE F, LIVERANI A, CALIGIANA G. FGM and laminated doubly curved shells and panels of revolution with a free-form meridian: a 2-D GDQ solution for free vibrations[J]. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2011, **53**(6): 446-470.
- [18] ERINGEN A C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1972, **10**: 425-435.
- [19] 张继超, 钟心雨, 陈一鸣, 等. 基于 Hamilton 体系的功能梯度矩形板自由振动问题的解析解[J]. *应用数学和力学*, 2024, **45**(9): 1157-1171. (ZHANG Jichao, ZHONG Xinyu, CHEN Yiming, et al. Hamiltonian system-based analytical solutions to free vibration of functionally graded rectangular plates[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2024, **45**(9): 1157-1171. (in Chinese))
- [20] GOLBAHAR HAGHIGHI M R, EGHTEHAD M, MALEKZADEH P. Coupled DQ-FE methods for two dimensional transient heat transfer analysis of functionally graded material[J]. *Energy Conversion and Management*, 2008, **49**(5): 995-1001.
- [21] ERINGEN A C. On Rayleigh surface waves with small wave length[J]. *Letter in Applied Engineering Science*, 1973, **1**: 1.
- [22] ERINGEN A C, SPEZIALE C G, KIM B S. Crack-tip problem in non-local elasticity[J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1977, **25**(5): 339-355.
- [23] 黄再兴, 朱金福, 黄维扬. 非局部场论的发展历史, 研究现状及前景[J]. *江苏力学*, 1996(11): 27-33. (HUANG Zaixing, ZHU Jingfu, HUANG Weiyang. Development history, research status, and prospects of non-local field theory[J]. *Journal of Jiangsu Mechanics*, 1996(11): 27-33. (in Chinese))
- [24] BERT C W, MALIK M. Differential quadrature method in computational mechanics: a review[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1996, **49**(1): 1-28.
- [25] ERINGEN A C. Vistas of nonlocal continuum physics[J]. *International Journal of Engineering Science*, 1992, **30**(10): 1551-1565.
- [26] 纪园园, 吴华, 马和平, 等. 非线性对流-扩散方程的多区域拟谱方法[J]. *应用数学和力学*, 2011, **32**(10): 1169-1181. (JI Yuanyuan, WU Hua, MA Heping, et al. Multidomain pseudospectral methods for nonlinear convection-diffusion equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2011, **32**(10): 1169-1181. (in Chinese))