

外加周期激励控制齿轮传动系统 安全-吸引盆侵蚀与分岔*

银奎帮, 石咏荷, 郭峰

(西安铁路职业技术学院 机电工程学院, 西安 710026)

摘要: 针对高速重载齿轮系统因时变啮合刚度与齿侧间隙等强非线性因素耦合引发的失稳问题, 本研究引入外加周期激励控制策略, 建立单自由度齿轮传动系统动力学模型并进行数值求解. 采用胞映射法, 定量分析控制参数对系统安全-吸引盆的侵蚀与分岔转迁过程及吸引域占比 p 演化规律的影响. 基于 Floquet 乘子分析, 建立倍频系数、激励幅值与分岔阈值的定量映射关系, 结合系统相图和 Poincaré 映射图, 揭示了外加激励通过重构相空间拓扑实现稳定控制的机理, 定量阐明了关键控制参数对系统全局稳定性转变的调控机制. 研究表明: 低频激励易诱发高周期吸引子导致运动越界失稳; 高频激励触发安全-吸引盆侵蚀与分岔, 其中 P3S 吸引子稳定, P2S 吸引子经逆倍化分岔向 P1S 单周期安全轨道转迁; 反向激励幅值破坏稳定性, 而增大正向激励幅值可加速稳定化进程, 最终实现 P1S 吸引域全域覆盖. 研究结果为齿轮传动系统的振动抑制、参数优化与安全设计提供了理论支撑.

关键词: 齿轮传动系统; 非线性动力学; 振动控制; 安全-吸引盆

中图分类号: O322; TB533+.1 **文献标志码:** A **DOI:** 10.21656/1000-0887.460071

External Periodic Excitation Control of Gear Transmission Systems for Safety-Attraction Basin Erosion and Bifurcation

YIN Kuibang, SHI Yonghe, GUO Feng

(School of Mechanical and Electrical Engineering, Xi'an Railway Vocational & Technical Institute,
Xi'an 710026, P.R. China)

Abstract: In response to the instability problem caused by the coupling of strong nonlinear factors such as time-varying mesh stiffness and backlash in high-speed heavy-duty gear systems, an external periodic excitation control strategy was introduced, to establish and numerically solve a dynamic model for single-degree-of-freedom gear transmission systems. With the cell mapping method, the effects of control parameters on the erosion and bifurcation transition process of the system safety-attraction basin, as well as the evolution law of the attraction domain proportion p , were quantitatively analyzed. Based on the Floquet multiplier analysis, a quantitative mapping relationship between the doubling coefficient, the excitation amplitude, and the bifurcation threshold, was established. Combined with the system phase diagram and the Poincaré mapping diagram, the stable control mechanism realized through reconstruction of the phase space topology under external excitation, was revealed, and the control mechanism of key control parameters on the global stability transition of the system was quantitatively elucidated. The results shows that, the low-frequency excitation can easily induce

* 收稿日期: 2025-04-10; 修订日期: 2025-06-17

基金项目: 西安铁路职业技术学院 2025 年度立项课题 (XTZY25K02)

作者简介: 银奎帮 (1994—), 男, 硕士 (通信作者). E-mail: 18153991602@163.com).

引用格式: 银奎帮, 石咏荷, 郭峰. 外加周期激励控制齿轮传动系统安全-吸引盆侵蚀与分岔 [J]. 应用数学和力学, 2026, 47(4): 487-495.

high period attractors, leading to motion boundary instability; the high frequency excitation can trigger safety-attraction basin erosion and bifurcation, where the P3S attractor is stable and the P2S attractor undergoes inverse doubling bifurcation to transition to the P1S single period safe orbit; and the reverse excitation amplitude will destroy the system stability, while increasing the forward excitation amplitude can accelerate the stabilization process, ultimately achieving full coverage of the P1S attraction domain. The research provides a theoretical support for vibration suppression, parameter optimization, and safety design of gear transmission systems.

Key words: gear transmission system; nonlinear dynamics; vibration control; safety-attraction basin

0 引言

齿轮系统是现代动力传递的核心,其动力学行为直接关乎航空航天、轨道交通及精密制造等高端装备的可靠性。提升功率密度与优化 NVH 性能的需求,使得抑制非线性振动成为关键挑战。其核心难点在于齿轮副非光滑动力学特性:① 时变啮合刚度引发的周期突变;② 双侧齿隙导致的接触切换;③ 多源激励耦合诱发的混沌响应。这些机制引发分岔、跳跃谐振及多稳态等复杂行为,凸显了发展非线性动力学方法与先进振动控制策略的迫切性。Kahraman 等^[1]通过谐波平衡法对齿轮时不变啮合系统进行求解,并分析其非线性动力学特性。王树国等^[2]构建了多间隙二级齿轮系统,发现在多种非线性因素作用下齿轮系统表现出丰富的分岔特性。刘晓宁等^[3-4]通过 OGY 控制理论,将考虑齿轮系统时变啮合刚度的不稳定的周期解稳定控制。

安全盆和吸引域是研究非线性系统初值稳定性的一种有效方法,Hsu 等^[5]首先提出了动力系统胞映射的理念,该方式能够非常有效确定渐近稳定时的平衡状态、周期运动及其吸引域,并在文献[6]中阐述了高阶非线性动力系统全局行为的一般特征和拓扑考虑,发现胞映射法可有效分析四阶非线性动力系统的全局稳定性。Thompson 等^[7-9]提出了安全盆研究方法,用于船舶倾覆问题的非线性动力学分析。田亚平等^[10]利用胞映射法研究锥齿轮系统的非线性动力学特性,发现了多种分岔特性和齿面冲击共存现象。苟向锋等^[11]通过改进胞映射法揭示了单自由度直齿轮系统安全盆在时变刚度与传递误差耦合下的侵蚀机制。李正发等^[12-13]提出了多状态啮合齿轮系统的安全-吸引盆侵蚀分析方法,结合分岔理论揭示了系统吸引子共存与转迁的耦合机制。张莹等^[14]利用吸引域全局变量分析法,探究了 a, b 两参数变化时系统不同动力学行为间的转迁机制。唐进元等^[15]通过图胞映射法,利用系统吸引子、吸引域的转迁规律对单自由度齿轮系统进行了全局分析。石建飞等^[16]研究了齿面磨损失效的齿轮系统动态失稳盆的转迁机制,发现共存吸引子会导致系统平稳运行破坏,出现动态失稳盆侵蚀。金花等^[17-18]在单级齿轮传动中应用胞映射法、延拓打靶法进行数值求解并追踪系统的共存吸引子,揭示了系统参数小范围内存在大量共存吸引子及分岔转迁过程;同时讨论了系统参数对动力学的影响,揭示了多种不连续分岔行为与运动形式之间的转迁规律。可见,安全盆、吸引域在非线性动力学系统中应用已非常成熟,但在振动控制中鲜为少见,且无关于外加周期激励控制齿轮系统的全局特性分析。

本文基于齿轮传动动力学,建立了包含综合传递误差、时变啮合刚度及齿侧间隙等非线性因素的单自由度齿轮传动系统非线性动力学模型,通过胞映射法、延拓打靶法等建立了系统不同控制参数下的安全-吸引盆,分析了安全-吸引盆侵蚀与分岔现象及吸引子转迁规律,揭示了外加周期激励控制参数对齿轮传动系统全局动力学的影响。

1 齿轮啮合副力学模型及微分方程

以单自由度齿轮传动系统为研究对象,非线性动力学模型如图 1 所示,考虑齿侧间隙、时变啮合刚度及综合传递误差等强非线性因素,根据 Newton 力学定律和 Lagrange 方程,可得系统的非线性动力学方程为

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\theta}_1 + C_g (r_{b1} \dot{\theta}_1 - r_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{e}(\tau)) r_{b1} + k(\tau) f(r_{b1} \theta_1 - r_{b2} \theta_2 - e(\tau)) r_{b1} = T_1, \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + C_g (r_{b1} \dot{\theta}_1 - r_{b2} \dot{\theta}_2 - \dot{e}(\tau)) r_{b2} - k(\tau) f(r_{b1} \theta_1 - r_{b2} \theta_2 - e(\tau)) r_{b2} = -T_2, \end{cases} \quad (1)$$

式中 I_i, θ_i, r_{bi} 和 T_i 分别表示主(从)动轮转动惯量、扭转角位移、基圆半径、扭矩; C_g 为齿轮啮合阻尼系数, $k(\tau)$ 为啮合刚度, $e(\tau)$ 为综合误差, $f(x)$ 为齿轮副啮合间隙函数,取单级齿轮啮合副间隙为 $2d$, 则该函数可表示为

$$f(x) = \begin{cases} x - d, & x \geq d, \\ 0, & -d < x < d, \\ x + d, & x \leq -d. \end{cases} \quad (2)$$

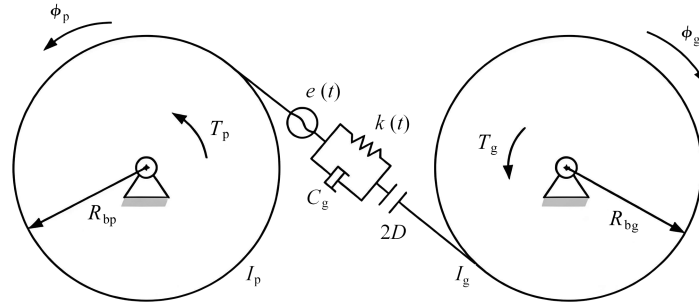


图 1 单自由度齿轮非线性动力学模型

Fig. 1 Nonlinear dynamic model for the single-degree-of-freedom gear

令齿轮位移 $x_1 = r_{b1}\theta_1, x_2 = r_{b2}\theta_2$, 当量质量 $m_i = I_i/r_{bi}^2$, 啮合阻尼 $c = C_g$, 啮合力 $F_i = T_i/r_{bi}$, 传动误差 $q = x_1 - x_2 - e(\tau)$, 等效质量 $m = m_1m_2/(m_1 + m_2)$, 式(1)可简化为

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + k(\tau)f(q) = F(\tau). \quad (3)$$

考虑内外激励及时变啮合刚度等因素,根据文献[11]中式(1)的简化过程,通过无量纲化,得到单自由度齿轮传动系统非线性振动微分方程为

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + (1 + k\cos(\omega t))f(x) = F + \varepsilon\omega^2\cos(\omega t), \quad (4)$$

式中 x, \dot{x}, \ddot{x} 表示啮合副相对位移、速度和加速度; $\xi, k, \varepsilon, \omega, F$ 分别表示阻尼比、啮合刚度波动幅值、综合传递误差系数、啮合频率及转矩.令 $\dot{x} = y$, 可得系统降阶后的状态方程组为

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = F + \varepsilon\omega^2\cos(\omega t) - 2\xi y - (1 + k\cos(\omega t))f(x). \end{cases} \quad (5)$$

2 外周期控制与研究方法

在本系统中引入外加周期激励控制,控制项为

$$u(t) = a\sin(b\omega t), \quad (6)$$

式中 a 为激励幅值, b 为倍频系数, $a \neq 0, b \neq 0, a > 0$ 为正向激励控制, $a < 0$ 为反向激励控制, $b > 1$ 为高次谐波激励, $b < 1$ 为低次谐波激励, $b = 1$ 为同频周期激励.

由式(4)–(6)可得,外加周期激励的齿轮系统非线性动力学方程为

$$\ddot{x} + 2\xi\dot{x} + (1 + k\cos(\omega t))f(x) = F + \varepsilon\omega^2\cos(\omega t) - u(t). \quad (7)$$

研究中进行全局特性分析时,取时间 Poincaré 映射(频闪映射),每隔一个外激励周期 $2\pi/\omega$ 捕获 Poincaré 截面 $\sigma\{(x, \dot{x}, \theta) \in R^2 \times S, \theta = \omega t = 0 \pmod{2\pi}\}$ 特性参数;同时,采用胞映射+点映射法进行探究,在系统相空间定义考察域 $H = \{(x, \dot{x}) \mid x \in [-2, 2], \dot{x} \in [-2, 2]\}$, 将该区域划分为 500×500 , 离散产生 2.5×10^5 个相胞 c_{ij} , 将每个相胞的一个顶点作为系统初始状态,进行 Poincaré 映射,得到胞对应吸引子在截面上的投影集,识别吸引子周期,构建系统全局状态吸引域.齿轮传动系统在啮合过程中易受载异常,出现剧烈振动,所以振动幅度需控制在安全区域;相胞经过 n 周期迭代后,判别系统的状态空间是否仍处在考察域 H 内,将该相胞轨迹状态投影到 Poincaré 截面,描绘系统安全盆.本文采用安全-吸引盆对周期激励控制齿轮系统的安全盆侵蚀与分岔、吸引域中吸引子转迁进行全局性分析.

为探究齿轮系统在不同控制参数下系统安全-吸引盆的转迁特性,采用四阶 Runge-Kutta 法进行数值求解.齿轮系统的几何参数如表 1 所示,选取基本参数: $\omega = 1.7, \varepsilon = 0.3, F = 0.1, \xi = 0.05, k = 0.02, d = 1.0$.控制参数 $a = 0.3, b \in [\pi/2, \pi/9]$ 时控制系统的安全-吸引盆侵蚀与吸引子转迁如图 2 所示.考察域中安全状态通过 S(safe state, 安全状态)和 U(usafe state, 不安全状态)表示,吸引子通过 PN(period N, N 为周期数)表示,则安全-吸引盆表示为 PNS/PNU(周期 N 的安全吸引域或非安全吸引域).本研究中采用统一色彩与标记

进行状态标注,如表2所示.

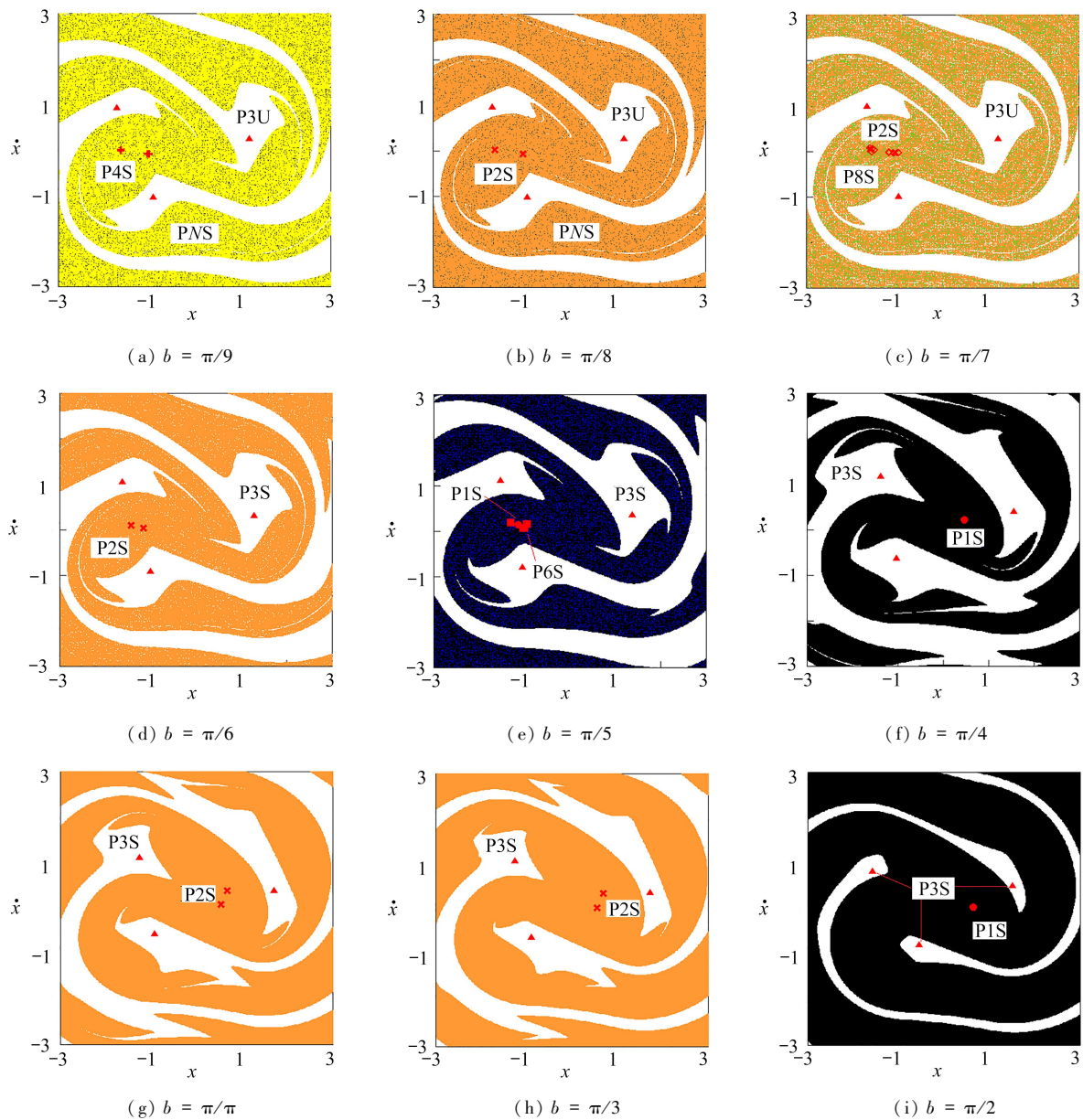


图2 倍频系数 b 变化时安全-吸引盆的侵蚀与分岔过程

Fig. 2 The erosion and bifurcation process of the safety-attraction basin with the change of doubling coefficient b

注 为了解释图中的颜色,读者可以参考本文的电子网页版本,后同.

表1 齿轮几何参数

Table 1 Geometric parameters of gears

gear	number of teeth	gear module/m	pressure angle/($^{\circ}$)	pitch radius/m	quality/kg	moment of inertia/($\text{kg}\cdot\text{m}^2$)
drive gear	20	0.002 4	20	0.024	1.081	6.24×10^{-4}
driven gear	90	0.002 4	20	0.108	15.372	1.09×10^{-1}

表2 安全-吸引盆标注明细

Table 2 Safety-attraction basin label details

number of cycles	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	chaos
safety-attraction basin	black	orange	white	yellow	purple	blue	pink	green	grey
attractor	●	×	▲	+	★	■	*	◆	—

3 控制参数对系统安全-吸引盆侵蚀与分岔的影响

齿轮传动系统安全-吸引盆侵蚀及分岔全局分析目的是揭示初始微扰对系统长期动力学行为的影响,通过调整周期激励控制参数,探究不同参数条件下对系统振幅安全性和吸引子共存转迁的控制效果,因此,所研究相空间考察域内相胞越趋向于安全和低周期轨道,当前参数下外加周期激励控制效果明显.考察域 H 划分为 N 个相胞,其中 P_N 吸引子占据 P_i 个相胞,则 $p = P_i/N$ 值的变化情况反映了控制的变化趋势.

3.1 倍频系数 b 变化下系统的安全-吸引盆侵蚀与分岔

当 $b = \pi/9$, 如图 2(a) 齿轮系统中出现周期 3(白色)、周期 4(黄色)及 chaos(灰色)等吸引子共存状态,同时周期 3 为不安全的吸引域,周期 4 安全的吸引域内存在高周期或 PNS 混沌运动,如表 3 所示, P_{3U} (不安全的周期 3 运动)、 P_{4S} (安全的周期 4 运动)及 PNS(安全的多周期/混沌运动)吸引域占比为 $p_{3U} = 0.319 9$, $p_{4S} = 0.642 1$, $p_{NS} = 0.037 8$.图 2(b) 为 $b = \pi/8$ 时系统的安全-吸引盆,图中存在橙色部分,原 P_{4S} 运动转迁为 P_{2S} ,当前相胞的运动轨道被抑制,吸引域占比 $p_{4S} = 0.642 1 \rightarrow p_{2S} = 0.643 1$,安全性未发生转变,PNS 吸引域占比 $p_{NS} = 0.023 6$,较前值有所减小,部分混沌运动轨道控制在 P_{2S} 区域,同时不安全周期 3 部分保持稳定.当 $b = \pi/7$ 时, P_{2S} 部分显露绿色斑点,可见周期 2 运动区域出现 PNS 混沌运动,向 P_{8S} 高周期运动轨道转迁.周期 8 轨道吸引子: $(-1.604 094 464, 0.085 063 624)$, $(-1.558 300 83, 0.000 832 495)$, $(-1.541 264 967, 0.070 318 569)$, $(-1.504 387 677, 0.038 683 12)$, $(-1.185 485 582, -0.002 553 981)$, $(-1.183 098 23, -0.026 067 723)$, $(-1.084 111 718, -0.040 660 364)$, $(-0.976 993 082, -0.018 450 089)$ 逼近于周期 2 吸引子: $(-1.590 785 645, 0.056 945 949)$, $(-1.049 277 005, -0.027 676 87)$.当增大频率系数至 $b = \pi/6$, 周期 8 运动出现分岔现象,运动轨道被吸引至周期 2 吸引子范围;原 P_{3U} 不安全 3 周期运动区域发生安全盆分岔侵蚀现象,随倍频系数增加,逐渐转迁为 P_{3S} 安全的 3 周期运动.如图 2(d) 所示,整个考察域中由白色 P_{3S} 、橙黄色 P_{2S} 及部分 PNS 所占据.在图 2(e) 中, P_{2S} 橙色区域发生逆倍化分岔,出现 P_{1S} 单周期安全区域,同时 PNS 受激励控制,分岔出现 P_{6S} 周期安全吸引域,白色区域 $p_{3S} = 0.435 5$, P_{3S} 不断侵蚀其他区域.当 $b = \pi/5$ 时,系统被控制在考察域 H 内为 P_{3S} 和 P_{1S} 共存,白色区域持续增大吸引域占比至 $p_{3S} = 0.462 5$.当 $b = \pi/4$ 时,系统安全-吸引盆如图 2(g),外加周期激励与系统发生共振, P_{3S} 和 P_{2S} 共存,且 P_{3S} 吸引域占比又出现减小趋势, $p_{3S} = 0.341 9$, P_{1S} 发生倍化分岔转迁为 P_{2S} ,单周期运动轨道被侵蚀殆尽,系统虽处在安全区域,但低周期轨道占比下降,控制效果不佳.当越过共振频率 ω , 如图 2(h) 所示, P_{2S} 逐渐占据主导地位, $p_{3S} = 0.304 4$, $p_{2S} = 0.695 6$.频率系数增大至 $b = \pi/2$ (图 2(i)), 系统发生逆倍化分岔, P_{3S} 与 P_{1S} 运动区域共存,此时 $p_{3S} = 0.149 7$, $p_{1S} = 0.850 3$, 所以外加高次谐波激励信号加速了系统安全-吸引盆侵蚀与分岔,向更稳定和安全的单周期安全吸引子转迁.其对应参数下的相图、Poincaré 映射图如图 3(a)—3(i) 所示.

表 3 安全-吸引盆吸引域占比 p 值分布

Table 3 The distribution of p -values for the proportion of attraction zones in the safety-attraction basin

b	p	safety-attraction basin	Floquet multiplier
$\pi/9$	$p_{3U} = 0.319 9, p_{4S} = 0.642 1, p_{NS} = 0.037 8$	P_{3U}, P_{4S}, PNS	$(-0.479 3+0.000 0i, -1.441 8+0.000 0i)$
$\pi/8$	$p_{3U} = 0.333 3, p_{2S} = 0.643 1, p_{NS} = 0.023 6$	P_{3U}, P_{2S}, PNS	$(-0.482 1+0.000 0i, -1.433 1+0.000 0i)$
$\pi/7$	$p_{3U} = 0.446 0, p_{2S} = 0.512 9, p_{NS} = 0.041 0$	P_{3U}, P_{2S}, P_{8S}	$(-0.501 9+0.000 0i, -1.376 8+0.000 0i)$
$\pi/6$	$p_{3S} = 0.408 7, p_{2S} = 0.591 3$	P_{3S}, P_{2S}	$(-0.605 9+0.000 0i, -1.140 5+0.000 0i)$
$\pi/5$	$p_{3S} = 0.435 5, p_{1S} = 0.499 9, p_{6S} = 0.064 5$	P_{3S}, P_{1S}, P_{6S}	$(-0.549 1+0.624 1i, -0.549 1+0.624 1i)$
$\pi/4$	$p_{3S} = 0.462 5, p_{1S} = 0.537 3$	P_{3S}, P_{1S}	$(-0.728 9+0.399 6i, -0.728 9-0.399 6i)$
π/π	$p_{3S} = 0.341 9, p_{2S} = 0.658 1$	P_{3S}, P_{2S}	$(-0.530 6+0.000 0i, -1.302 4+0.000 0i)$
$\pi/3$	$p_{3S} = 0.304 4, p_{2S} = 0.695 6$	P_{3S}, P_{2S}	$(-0.524 1+0.000 0i, -1.318 4+0.000 0i)$
$\pi/2$	$p_{3S} = 0.149 7, p_{1S} = 0.850 3$	P_{3S}, P_{1S}	$(-0.828 0+0.074 2i, -0.828 0-0.074 2i)$

随倍频系数 b 增大,系统安全盆逐渐被安全区域侵蚀,吸引子转迁至周期 1,3 稳定轨道,根据 Floquet 稳定理论判断周期解的稳定性, b 在 $\pi/6 \sim \pi/5$ 之间存在 Floquet 乘子从 $(-1, 0)$ 穿过单位圆,系统发生倍周期,周期解趋于稳定,随后发生倍化分岔再次进入不稳定状态.由表 3 可见, b 在 $\pi/3 \sim \pi/2$ 之间, Floquet 乘子从

$(-0.524\ 1+0.000\ 0i, -1.318\ 4+0.000\ 0i)$ 转变为 $(-0.828\ 0+0.074\ 2i, -0.828\ 0-0.074\ 2i)$, 系统可能发生逆 Neimark-Sacker 分岔, 向稳定的周期 1, 3 转变。

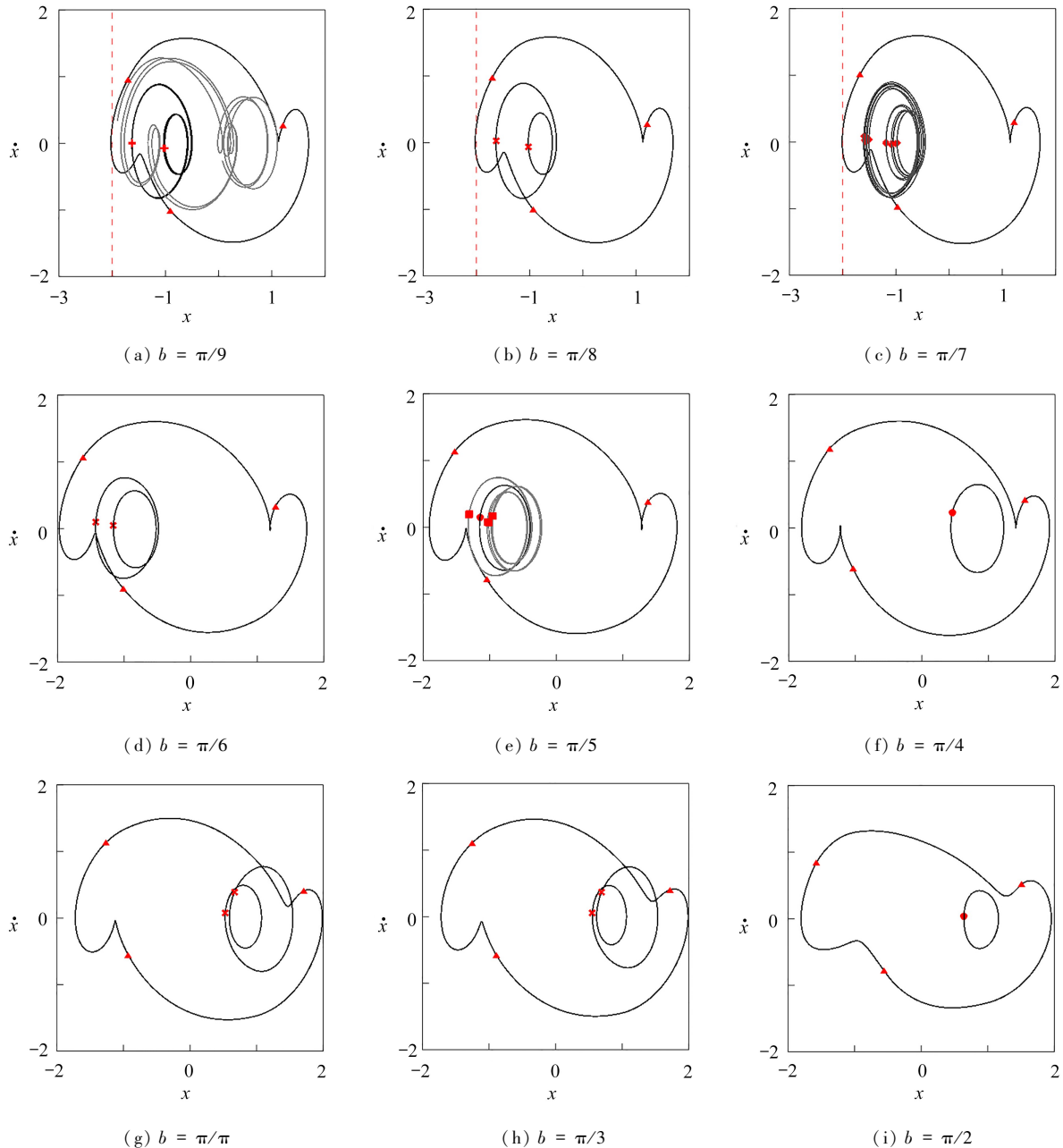


图3 倍频系数 b 变化时相图及 Poincaré 映射图

Fig. 3 The phase diagram and the Poincaré mapping diagram with the change of doubling coefficient b

3.2 激励幅值 a 变化下系统的安全-吸引盆侵蚀与分岔

当 $a = -1.0$ 时, 如图 4(a), 混沌运动 PNU 占据安全-吸引盆, 系统运动失稳且相轨迹越界, 如图 5(a), 此时外激励控制失效. 施加反向激励幅值 $a = -0.2$ 时, 系统形成 P2S、P3U 和 PNS 吸引子共存状态, 混沌运动被抑制但 P3U 轨线仍突破安全边界, 在图 5(b) 中可见. 取正向激励幅值为 $a = 0.30$, 系统始态为 P1S 和 P3S 吸引子共存, P3U 安全盆逐步被 P1S 侵蚀. 当继续增大至 $a = 0.40$, P1S 安全-吸引盆的吸引域占比 $p_{1s} = 0.969\ 3$, 占据主导控制地位; P3S 吸引域被 P1S 侵蚀至 $p_{3s} = 0.030\ 7$. 当 $a = 0.42$ 时, P3S 吸引子发生分岔, 迁为 P5S 高周期运动, 为实现全局 P1S 做准备, 吸引域占比 $p_{1s} = 0.989\ 1, p_{5s} = 0.010\ 9$. 取 $a = 0.43$ 后, 如图 4(f)、图 5(f) 所示, 系统在控制参数作用下, 完全控制在 P1S 吸引子的单周期安全运动轨道, 吸引域占比 $p_{1s} = 1.0$.

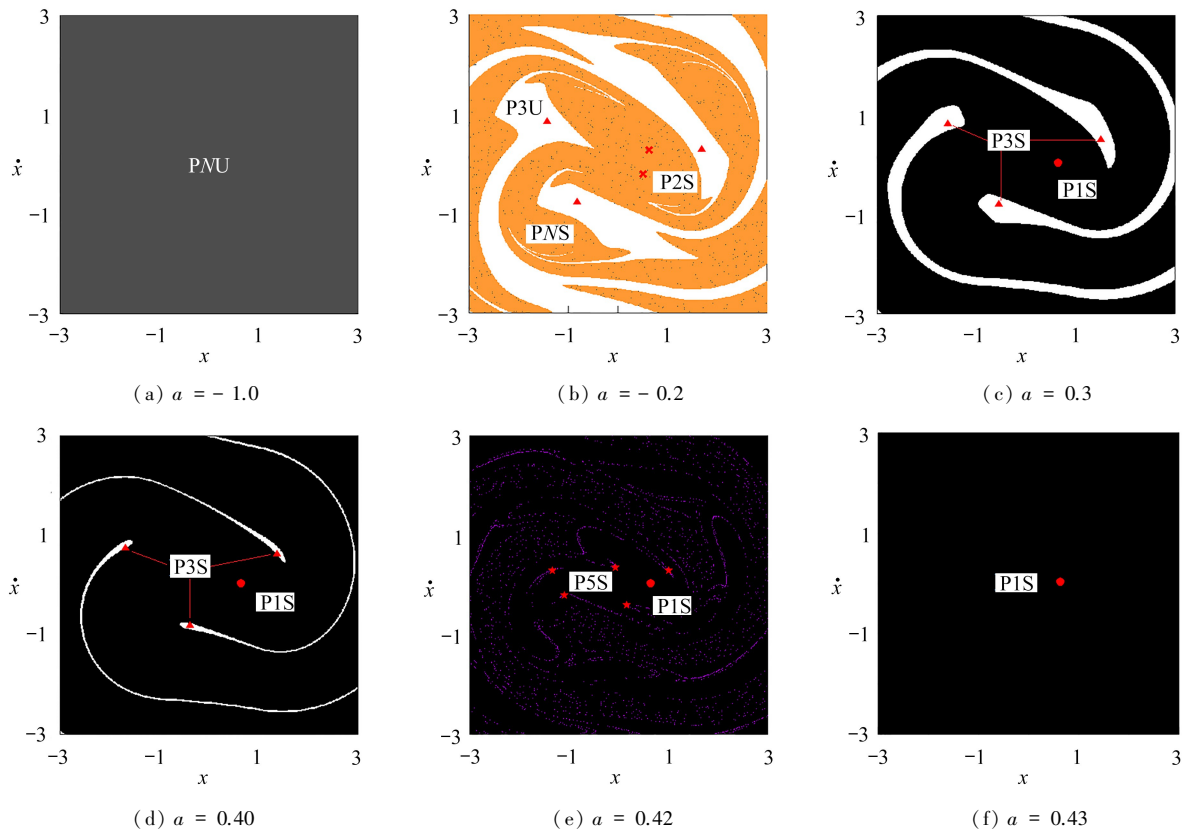


图 4 激励幅值 a 变化时安全-吸引盆的侵蚀与分岔过程

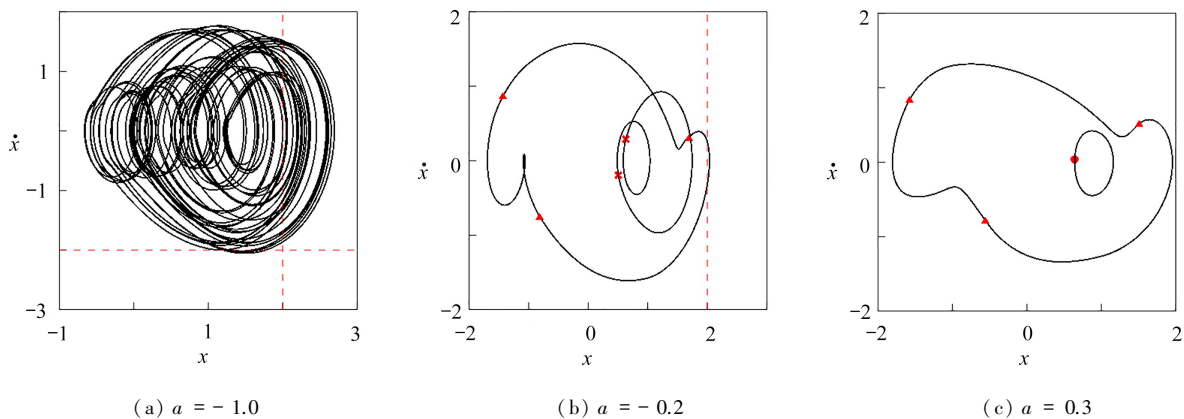
Fig. 4 The erosion and bifurcation process of the safety-attraction basin with the change of excitation amplitude a

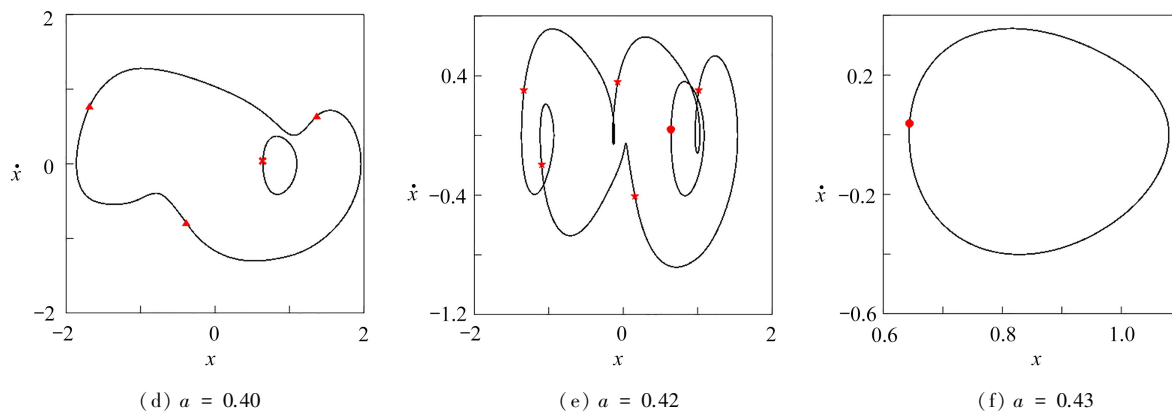
表 4 安全-吸引盆吸引域占比 p 值分布

Table 4 The distribution of p -values for the proportion of attraction zones in the safety-attraction basin

a	p	safety-attraction basin	Floquet multiplier
-1.0	$p_{NU} = 1.0$	PNU	$(-0.466\ 3+0.000\ 0i, -1.481\ 8+0.000\ 0i)$
-0.2	$p_{3U} = 0.367\ 1, p_{2S} = 0.629\ 3, p_{NS} = 0.003\ 6$	P3U, P2S, PNS	$(-0.493\ 0+0.000\ 0i, -1.401\ 5+0.000\ 0i)$
0.30	$p_{3S} = 0.149\ 7, p_{1S} = 0.850\ 3$	P3S, P1S	$(-0.828\ 0+0.074\ 2i, -0.828\ 0-0.074\ 2i)$
0.40	$p_{3S} = 0.030\ 7, p_{1S} = 0.969\ 3$	P3S, P1S	$(1.000\ 0+0.000\ 0i, 0.691\ 0+0.000\ 0i)$
0.42	$p_{5S} = 0.010\ 9, p_{1S} = 0.989\ 1$	P5S, P1S	$(-0.677\ 9+0.481\ 1i, -0.677\ 9-0.481\ 1i)$
0.43	$p_{1S} = 1.0$	P1S	$(-0.653\ 6+0.513\ 5i, -0.653\ 6-0.513\ 5i)$

随激励幅值 a 增大,系统运动向安全区域转变,吸引子转迁至低周期 1 轨道,同时通过计算系统 Floquet 乘子,发现系统由特征值穿越单位圆向稳定在单位圆内转变,系统不动点稳定性增强,由表 4 可见, $a = 0.40$ 时, Floquet 乘子为 $(1.000\ 0+0.000\ 0i, 0.691\ 0+0.000\ 0i)$,系统发生鞍结分岔,向更稳定的周期 1 转变。



图5 激励幅值 a 变化时相图及 Poincaré 映射图Fig. 5 The phase diagram and the Poincaré mapping diagram with the change of excitation amplitude a

4 结 论

本文基于对外加周期激励下齿轮传动系统全局特性的分析,得到如下结论:

随周期激励频率系数增大,系统在考察域内呈现出丰富的安全-吸引盆侵蚀与分岔现象.其中 P3S 吸引子表现稳定,P2S 吸引子发生逆倍化分岔并向低周期 P1S 吸引子演化,高次谐波激励会加速吸引盆侵蚀过程,促使系统向稳定的单周期安全运动区域转迁.低频周期激励易引发高周期轨道吸引子,导致系统失稳并越界产生不安全运动,而激励频率与系统固有频率共振时控制效果显著恶化.反向相位激励会破坏系统稳定性,正向激励参数 a 增大则能加速稳定化进程,最终实现 P1S 单周期运动吸引域 100% 全覆盖.研究表明,外加周期激励在特定参数匹配时可有效提升系统稳定性,但其效果具有强参数依赖性,大范围应用存在局限性.

参考文献 (References):

- [1] KAHRAMAN A, SINGH R. Non-linear dynamics of a spur gear pair[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1990, **142**(1): 49-75.
- [2] 王树国, 张艳波, 刘文亮, 等. 多间隙二级齿轮非线性振动分岔特性研究[J]. *应用数学和力学*, 2016, **37**(2): 173-183. (WANG Shuguo, ZHANG Yanbo, LIU Wenliang, et al. Nonlinear vibration bifurcation characteristics of multi-clearance 2-stage gear systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, **37**(2): 173-183. (in Chinese))
- [3] 刘晓宁, 沈允文, 王三民. 3 自由度齿轮系统的混沌控制[J]. *机械工程学报*, 2006, **42**(12): 52-58. (LIU Xiaoning, SHEN Yunwen, WANG Sanmin. Chaos control of 3-DOF geared system[J]. *Chinese Journal of Mechanical Engineering*, 2006, **42**(12): 52-58. (in Chinese))
- [4] 刘晓宁. 三自由度齿轮传动系统的非线性振动及混沌控制[D]. 西安: 西北工业大学, 2003. (LIU Xiaoning. Non-linear vibration and chaos control of a three-degree-of-freedom gear transmission system[D]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University, 2003. (in Chinese))
- [5] HSU C S, GUTTALU R S. An unravelling algorithm for global analysis of dynamical systems: an application of cell-to-cell mappings[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1980, **47**(4): 940-948.
- [6] 徐皆苏, 徐健学. 高阶非线性动力系统全局分析: 胞胞映射法应用[J]. *应用数学和力学*, 1985, **6**(11): 953-962. (HSU C S, XU Jianxue. The global analysis of higher order nonlinear dynamical systems and the application of cell-to-cell mapping method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1985, **6**(11): 953-962. (in Chinese))
- [7] THOMPSON J M T. Transient basins: a new tool for designing ships against capsizes[C]//*IUTAM Symp Dynamics of Marine Vehicles & Structures in Waves*. London, 1990.
- [8] RAINEY R C T, THOMPSON J M T. The transient capsize diagram: a new method of quantifying stability in waves[J]. *Journal of Ship Research*, 1991, **35**(1): 58-62.
- [9] THOMPSON J M T, MCROBIE F A. Indeterminate bifurcations and the global dynamics of driven oscillators

- [C]//*1st European Nonlinear Oscillations Conference*. Hamburg, 1993.
- [10] 田亚平, 杨江辉, 王瑞邦. 直齿锥齿轮分岔脱啮特性参数解域界结构[J]. 应用数学和力学, 2023, **44**(8): 965-976. (TIAN Yaping, YANG Jianghui, WANG Ruibang. Parametric solution domain structures for bifurcation and non-meshing dynamic characteristics of straight bevel gear systems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2023, **44**(8): 965-976. (in Chinese))
- [11] 苟向锋, 韩林勃, 朱凌云, 等. 单自由度齿轮传动系统安全盆侵蚀与分岔[J]. 振动与冲击, 2020, **39**(2): 123-131. (GOU Xiangfeng, HAN Linbo, ZHU Lingyun, et al. Erosion and bifurcation of the safe basin for a single-degree-of-freedom spur gear system[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2020, **39**(2): 123-131. (in Chinese))
- [12] 李正发, 苟向锋, 朱凌云, 等. 齿根安全条件下多状态啮合齿轮传动系统安全-吸引盆侵蚀与分岔[J]. 振动与冲击, 2021, **40**(5): 63-74. (LI Zhengfa, GOU Xiangfeng, ZHU Lingyun, et al. Erosion and bifurcation of safety-attraction basin for multi-state meshing gear transmission system under tooth root safety condition[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2021, **40**(5): 63-74. (in Chinese))
- [13] 李正发, 苟向锋, 朱凌云, 等. 直齿轮副齿面接触安全条件及安全盆[J]. 振动、测试与诊断, 2022, **42**(3): 446-453. (LI Zhengfa, GOU Xiangfeng, ZHU Lingyun, et al. Erosion and bifurcation of safe basin under tooth contact safety condition for a spur gear pair[J]. *Journal of Vibration, Measurement & Diagnosis*, 2022, **42**(3): 446-453. (in Chinese))
- [14] 张莹, 都琳, 岳晓乐. Duffing映射的全局动力学行为分析与研究[J]. 西北工业大学学报, 2017, **35**(2): 316-320. (ZHANG Ying, DU Lin, YUE Xiaole. Analysis and research on the global dynamical behavior of duffing map[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2017, **35**(2): 316-320. (in Chinese))
- [15] 唐进元, 熊兴波, 陈思雨. 基于图胞映射方法的单自由度非线性齿轮系统全局特性分析[J]. 机械工程学报, 2011, **47**(5): 59-65. (TANG Jinyuan, XIONG Xingbo, CHEN Siyu. Analysis of global character of single degree of freedom nonlinear gear system based on digraph cell mapping method[J]. *Journal of Mechanical Engineering*, 2011, **47**(5): 59-65. (in Chinese))
- [16] 石建飞, 韩闯, 王砚麟, 等. 基于齿面磨损失效的齿轮传动系统动态失稳盆转迁机理研究[J]. 振动与冲击, 2025, **44**(8): 21-29. (SHI Jianfei, HAN Chuang, WANG Yanlin, et al. Study on dynamic instability basin migration mechanism of gear system based on tooth wear inefficiency[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2025, **44**(8): 21-29. (in Chinese))
- [17] 金花, 张子豪, 吕小红. 单级直齿轮副的共存吸引子特性研究[J]. 振动与冲击, 2023, **42**(23): 1-7. (JIN Hua, ZHANG Zihao, LÜ Xiaohong. Coexisting attractors characteristics of single-stage spur gear pair[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2023, **42**(23): 1-7. (in Chinese))
- [18] 金花, 吕小红, 张子豪, 等. 齿轮传动系统共存吸引子的不连续分岔[J]. 力学学报, 2023, **55**(1): 203-212. (JIN Hua, LÜ Xiaohong, ZHANG Zihao, et al. Discontinuous bifurcations of coexisting attractors for a gear transmission system[J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2023, **55**(1): 203-212. (in Chinese))