

基于微分思想的层合材料传热问题新解法*

李细霞, 戴海燕, 李长玉

(华南理工大学广州学院, 广州 510800)

摘要: 基于微分思想提出了一种针对层合材料传热问题的新解法.将层合材料交界处的温度随时间变化的曲线在微小时间段内近似为直线,用分离变量法求得了在微小时间段内各层包含未知系数的解析解,根据交界处能量连续的条件求得各层解析解中的未知系数,然后循环求得整个时间域内的温度场.最后利用此方法求解了某三层结构的传热问题,将计算结果与有限元法求得的结果进行了比较,讨论了几个参数对温度场的影响,从而进一步验证了方法的正确性.

关键词: 层合材料; 热传导; 分离变量; 微分思想

中图分类号: O343.2

文献标志码: A

DOI: 10.21656/1000-0887.380116

引言

在工程研究中经常会遇到层合材料瞬态传热的问题^[1-3].这些材料每层的热物理参数一致,但是每层之间又各不相同.层合材料因其本身的非线性,在求解瞬态传热的温度场时常采用数值方法^[4-6].主要的研究可归结如下:

2010年盛宏玉、李和平等运用状态空间理论,建立了时域空间内的差分方程,分析了层合材料传热问题^[7].2011年蓝林华、富明慧等将层合材料的传热问题转化为在时间域内的常微分方程问题,给出了一种有效的解法^[8].2011年李金娥等对某一双层结构进行研究,建立了Fourier(傅里叶)和非Fourier层合材料传热差分方程,研究了其温度场和热应力情况^[9].2012年富明慧等利用半解析精细积分法求解了层合圆柱体的三维温度场^[10].2012年Liu等利用Laplace(拉普拉斯)变换的方法研究了三层结构传热的问题^[11].2014年Movahedian等利用指数函数法研究了层合材料的传热问题^[12].2016年Mohajer等利用数值方法研究了层合材料传热的非Fourier问题^[13].

从文献分析可以看出,针对层合材料,求解一般运用有限元和有限差分等数值方法.本文针对层合材料,基于微分思想,结合分离变量法求解了其瞬态传热问题的半解析解.并且利用此方法对某三层结构的传热问题进行了算例分析,将结果和有限元法求得的结果进行了对比验证,讨论了几个参数对温度场的影响.

1 模型建立

问题的几何模型如图1所示,在层合材料表面进行 $q(t)$ 的热量加热的同时进行流体冷

* 收稿日期: 2017-05-02; 修订日期: 2017-07-17

基金项目: 广东省青年创新类人才项目基金(2016KQNCX226)

作者简介: 李细霞(1982—),女,讲师,硕士(Tel: +86-20-36903124; E-mail: lixx@gcu.edu.cn);

李长玉(1981—),男,副教授,博士(通讯作者. E-mail: licy@gcu.edu.cn).

却.流体的温度为 T_f , 流体和层合材料表面的对流换热系数为 h_0 , 在层合材料另一端的温度为 $f_n(t) = T_0$. 层合材料第 n 层密度为 ρ_n , 第 n 层的比热容为 c_n , 第 n 层热传导系数为 k_n , T_n 为层合材料第 n 层的瞬时温度函数. t 为时间变量, x 为厚度方向位置变量, 同时考虑材料内部产热与换热问题, 产热量为 Q_n , 第 n 层的换热系数为 h_n , 第 n 层的基础换热温度为 T_{extn} , T_{ina} 为材料的初始温度.

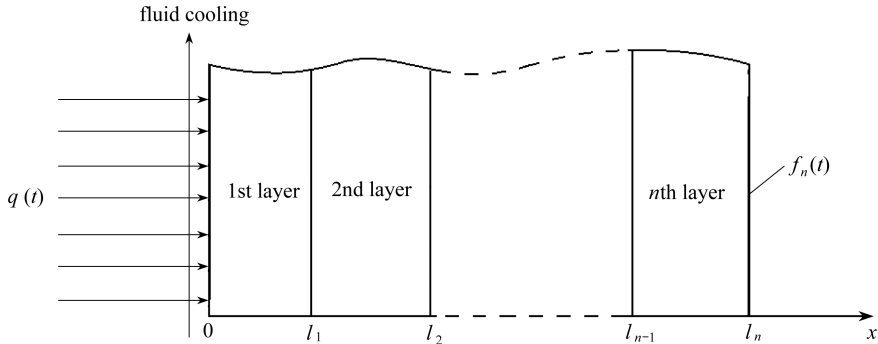


图 1 几何模型

Fig. 1 The geometrical model

控制方程为^[14]

$$\rho_n c_n \frac{\partial T_n}{\partial t} - k_n \frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} - h_n (T_{\text{extn}} - T_n) - Q_n = 0. \quad (1)$$

相应的边界条件为, 当 $x = 0$ 时

$$k_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x} - h_0 T_1(0, t) = -h_0 T_f - q(t) = f_1(t); \quad (2)$$

当 $x = l_n$ 时

$$T_n(l_n, t) = f_n(t) = T_0. \quad (3)$$

相应的初始条件为

$$T_n(x, 0) = T_{\text{ina}}. \quad (4)$$

2 求解思路

对于多层材料传热问题, 如果满足第 1 节描述的边界条件和初始条件, 求解的温度场情况应该如图 2(a) 所示. 材料表面因受到恒定热流量加热和流体冷却, 温度逐渐上升. 各层交界处的温度也逐渐上升, 交界处的温度变化应如图 2(b) 所示. 第 1 层和第 2 层温度随时间变化的函数记为 $f_{1,2}(t)$, 由微分思想可知如果 Δt 足够小, 可近似为 $f_{1,2}(t) = v_{1,2}t$ (其中 $v_{1,2}$ 为第 1、2 层交界温度随时间变化曲线的近似直线段的斜率). 此时对于第一层在 $[0, \Delta t]$ 时间内, 两个边界条件已知, 初始条件已知, 因此可以利用分离变量法求解第一层的温度场解析式, 其中 $v_{1,2}$ 未知. 同理, $[0, \Delta t]$ 时间内, 设第 $n-1$ 层和第 n 层温度随时间变化的函数为 $f_{n-1,n}(t) = v_{n-1,n}t$ (其中 $v_{n-1,n}$ 为第 $n-1$ 层和第 n 层交界温度随时间变化曲线的近似直线段的斜率), 可求解第 n 层的温度场解析解, 其中 $v_{n-1,n}$ 未知. 然后根据热传导时两层交界处必须满足温度相等和能量平衡, 可列出 $n-1$ 个方程的方程组, 求解此方程组可求得 $v_{n-1,n}$, 进一步可求解各层在 $[0, \Delta t]$ 时间内的解析解. 在求解出 $[0, \Delta t]$ 时间内的温度场解析解后, 以 Δt 时刻为初始条件, 进一步求解

第二个 $[0, \Delta t]$ 时间内的解析解. 以此循环, 可求得整个时间域的半解析解.

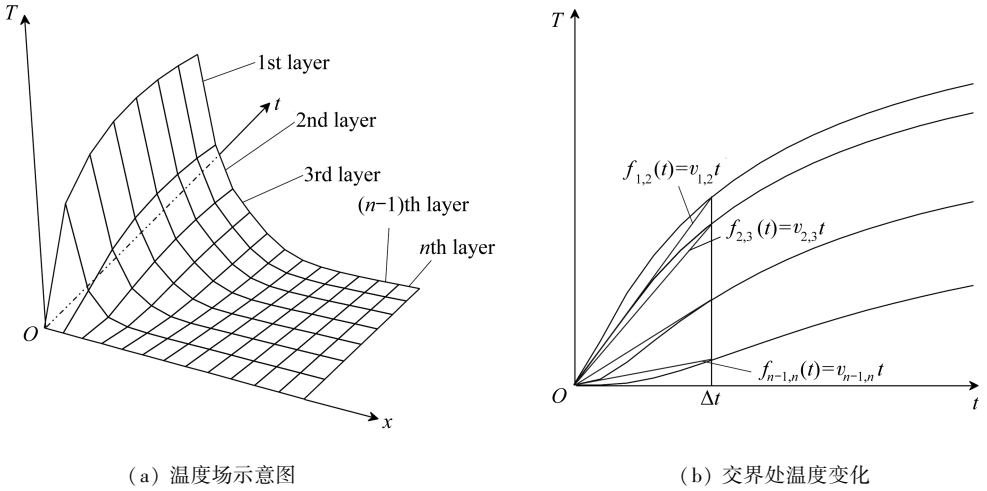


图2 方法原理示意图

Fig. 2 Schematic diagram of the method

3 公式推导

为表述简单, 本文只推导在第1个 $[0, \Delta t]$ 时间内的解析解, 第*i*个时间段的推导过程和第1个时间段的过程一致.

3.1 第一层解析解

对于第1层, 在 $[0, \Delta t]$ 时间内, 相应的控制方程和边界条件可表示如下:

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} - k_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - h_1 (T_{\text{ext}1} - T_1) - Q_1 = 0; \quad (5)$$

当 $x = 0$ 时

$$k_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x} - h_0 T_1(0, t) = -h_0 T_f - q(t) = f_1(t); \quad (6)$$

当 $x = l_1$ 时

$$T_1(l_1, t) = f_{1,2}(t) = v_{1,2}t, \quad (7)$$

相应的初始条件为

$$T_1(x, 0) = T_{\text{ina}}. \quad (8)$$

因为此偏微分方程为非齐次, 在求解时需要先对边界条件进行齐次化. 在此令

$$T_1(x, t) = v_1(x, t) + w_1(x, t), \quad (9)$$

$$w_1(x, t) = \frac{x - l_1}{k_1 + h_0 l_1} f_1(t) + \left(\frac{h_0 x + k_1}{k_1 + h l_1} \right) f_{1,2}(t), \quad (10)$$

将式(9)代入式(5)可得

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - h_1 v_1 + q_{\text{is}1}, \quad (11)$$

其中

$$q_{\text{ls1}} = -\rho_1 c_1 \frac{\partial w_1}{\partial t} + k_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - h_1 w_{1,i} + h_1 T_{\text{ext1}} + Q_{\text{txt1}}. \quad (12)$$

构造的函数 $w_1(x, t)$ 满足

$$k_1 \frac{\partial w_1(0, t)}{\partial x} - h_0 w_1(0, t) = f_1(t), \quad (13)$$

$$w_1(l_1, t) = f_{1,2}(t). \quad (14)$$

结合式(6)、(7)、(13)、(14)可知

$$k_1 \frac{\partial v_1(0, t)}{\partial t} - h v_1(0, t) = 0, \quad (15)$$

$$v_1(0, t) = 0. \quad (16)$$

由式(8)、(9)可知

$$v_1(x, 0) = T_{\text{ina}} - w_1(x, 0). \quad (17)$$

在将边界条件齐次化之后需对其分离变量,式(11)的特征方程为

$$\rho_1 c_1 \frac{\partial v_1}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, \quad (18)$$

根据分离变量法的思想,式(18)的试探解为

$$v_1(x, t) = Y_1(x) G_1(t). \quad (19)$$

将原问题转化为本征函数和本征值的问题,如果本征函数满足正交特性即可将其解耦,将式(19)代入式(18)中可得到

$$\frac{d^2 Y_1}{dx^2} + \lambda Y_1 = 0, \quad (20)$$

$$\frac{dG_1}{dt} + \lambda \frac{k_1}{\rho_1 c_1} G_1 = 0. \quad (21)$$

将式(19)代入式(15)、(16)可得

$$k_1 \frac{dY_1(0)}{dx} - h_0 Y_1(0) = 0, \quad (22)$$

$$Y_1(l_1) = 0. \quad (23)$$

结合式(20)、(22)、(23)可得本征函数为

$$Y_m(x) = (\cos(\sqrt{\lambda_m} l_1))x + \frac{h_0}{k_1 \sqrt{\lambda}} (\sin(\sqrt{\lambda_m} l_1))x, \quad (24)$$

其中本征值 λ_m 为式(25)的正根:

$$\frac{k_1 \sqrt{\lambda}}{h_0} + \tan(\sqrt{\lambda} l_1) = 0. \quad (25)$$

本征函数 $Y_m(x)$ 满足式(26),所以其满足正交特性:

$$\int_0^{l_1} Y_{1,m} Y_{1,k} dx = \begin{cases} 0, & m \neq k, \\ \delta_{1,m}, & m = k, \end{cases} \quad (26)$$

式中

$$\delta_{1,m} = \frac{1}{4} \left(2l_1 + \frac{\sin(-2l_1 \sqrt{\lambda_{1,m}})}{\sqrt{\lambda_{1,m}}} \right).$$

此时令

$$v_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_{1,m}(x) B_{1,m}(t), \quad (27)$$

将式(27)代入式(11)并将其两端在 $[0, l_1]$ 内积分可得

$$B'_{1,m} + \frac{k_1 \lambda_m + h_1}{\rho_1 c_1} B_{1,m} = \bar{q}_{1s1,m}, \quad (28)$$

其中

$$\bar{q}_{1s1,m} = \frac{1}{\rho_1 c_1} \frac{1}{\delta_{1,m}} \int_0^{l_1} q_{1s1} Y_{1,m} dx. \quad (29)$$

式(28)的解为^[15]

$$B_{1,m}(t) = e^{-\alpha_1 t} B_{1,m}(0) + e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 t'} \bar{q}_{1s1,m} dt', \quad (30)$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{k_1 \lambda_{1,m} + h_1}{\rho_1 c_1}, \quad (31)$$

$$B_{1,m}(0) = \frac{1}{\delta_{1,m}} \int_0^{l_1} [T_{1sa} - w_1(x, 0)] Y_{1,m} dx. \quad (32)$$

至此

$$T_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{1,m}(t) Y_{1,m}(x) + w_1(x, t). \quad (33)$$

3.2 第 n ($n \geq 2$) 层解析解

与3.1小节同样的过程,可求得第 n 层解析解,可表示为

$$T_n(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,m}(t) Y_{n,m}(x) + w_n(x, t), \quad (34)$$

其中

$$w_n(x, t) = \left(-\frac{1}{l_{n-1} - l_n} x + \frac{l_{n-1}}{l_{n-1} - l_n} \right) f_n(t) + \left(-\frac{1}{-l_{n-1} + l_n} x + \frac{l_n}{-l_{n-1} + l_n} \right) f_{n-1,n}(t), \quad (35)$$

$$Y_{n,m}(x) = \cos(\sqrt{\lambda_m} x) \sin(\sqrt{\lambda_m} l_{n-1}) - \cos(\sqrt{\lambda_m} l_{n-1}) \sin(\sqrt{\lambda_m} x), \quad (36)$$

$\sqrt{\lambda_m}$ 为式(36)的正根。

$$\cos(\sqrt{\lambda} l_n) \sin(\sqrt{\lambda} l_{n-1}) - \cos(\sqrt{\lambda} l_{n-1}) \sin(\sqrt{\lambda} l_n) = 0, \quad (37)$$

$$B_{n,m}(t) = e^{-\alpha_n t} B_{n,m}(0) + e^{-\alpha_n t} \int_0^t e^{\alpha_n t'} \bar{q}_{1sn,m} dt', \quad (38)$$

$$\alpha_n = \frac{k_n \lambda_{n,m} + h_n}{\rho_n c_n}, \quad (39)$$

$$\bar{q}_{1sn,m} = \frac{1}{\rho_n c_n} \frac{1}{\delta_{n,m}} \int_{l_{n-1}}^{l_n} q_{1sn} Y_{n,m} dx, \quad (40)$$

$$q_{1sn} = -\rho_n c_n \frac{\partial w_n}{\partial t} + k_n \frac{\partial^2 w_n}{\partial x^2} - h_n w_n + h_n T_0 + Q_{extn}, \quad (41)$$

表 1 层合材料参数

Table 1 Parameters of the layered structure

parameter	value	parameter	value
l_1 / mm	0.1	$k_3 / (\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}))$	0.185
l_2 / mm	1.5	$h_1 / (\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}))$	0
l_3 / mm	4.4	$h_3 / (\text{W}/(\text{m}^2\cdot\text{C}))$	0
$\rho_1 / (\text{kg}/\text{m}^3)$	1 190	$T_{\text{ext}1} / \text{C}$	37
$\rho_2 / (\text{kg}/\text{m}^3)$	1 116	$T_{\text{ext}2} / \text{C}$	37
$\rho_3 / (\text{kg}/\text{m}^3)$	971	$T_{\text{ext}3} / \text{C}$	37
$c_1 / (\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K}))$	3 600	$Q_1 / (\text{W}/\text{m}^2)$	368.1
$c_2 / (\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K}))$	3 300	$Q_2 / (\text{W}/\text{m}^2)$	368.1
$c_3 / (\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K}))$	2 700	$Q_3 / (\text{W}/\text{m}^2)$	368.3
$k_1 / (\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}))$	0.235	T_0 / C	37
$k_2 / (\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K}))$	0.445	$T_{\text{in}a} / \text{C}$	37
$q / (\text{W}/\text{m}^2)$	10 000	T_f / C	20

图 4 表示了层合材料表面温度随时间变化的情况.曲线 A 和 B 分别为本文方法计算的结果和有限元方法计算的结果,二者完全一致.比较曲线 A(各参数取值为: $h_0 = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$; $T_f = 20 \text{ C}$; $h_2 = 10^5 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$)和曲线 C(各参数取值为: $h_0 = 10 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$; $T_f = 20 \text{ C}$; $h_2 = 2\times 10^5 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$)发现 h_2 越大温度上升越慢,因为 h_2 为第二层内部换热系数.算例中,基础温度 $T_{\text{ext}2}$ 为 37 C 不变.在材料表面加热后,第二层材料温度 T_2 升高相对于基础温度会有一个差值 $T_2 - T_{\text{ext}2}$, 此时内部换热系数越大则 $h_2(T_2 - T_{\text{ext}2})$ 越大,内部损失热量越多,温度上升越缓慢.

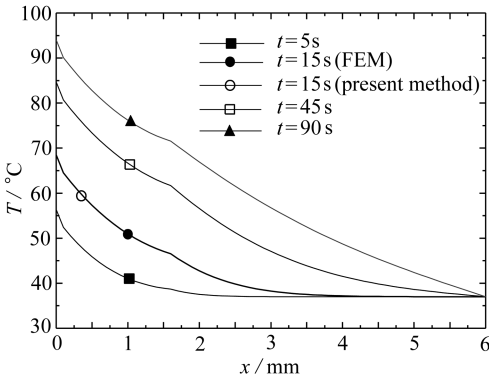
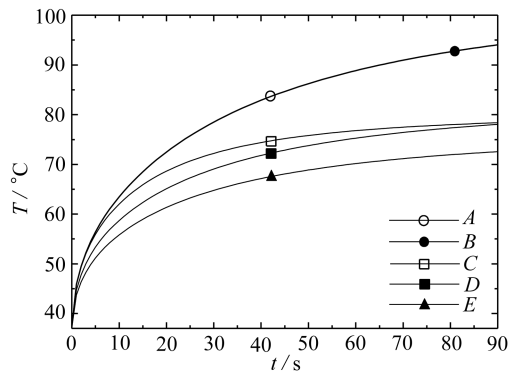
图 3 温度沿 x 方向分布Fig. 3 The temperature distribution along x -axis

图 4 结构表面温度随时间变化情况

Fig. 4 The temperature variation at the structural surface

比较曲线 A 和 D(各参数取值为: $h_0 = 60 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$; $T_f = 20 \text{ C}$; $h_2 = 10^5 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$)发现结构表面的对流换热系数越大温度上升越缓慢.比较曲线 D 和 E(各参数取值为: $h_0 = 60 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$; $T_f = 0 \text{ C}$; $h_2 = 10^5 \text{ W}/(\text{m}^2\cdot\text{C})$)发现冷却流体温度越低,温度上升越缓慢.这些计算结果和实际的物理现象均符合.可以推断计算结果是合理的.

5 结 论

针对层合材料瞬态传热问题,本文做了如下的研究:

1) 基于微分思想,将层合材料交界处的温度变化曲线在微小时间段内近似为直线后利用分离变量法对各微小时间段的温度场进行了求解,进而求得了整个时间域内的温度场。

2) 用本文的方法对某三层材料传热问题进行了分析,计算结果符合实际物理现象并且和有限元方法计算结果一致,进而验证了该方法的正确性。

该方法基于分离变量法推导,物理意义较有限元法更明确,容易稍做修改后解决其他不同情况的问题。

参考文献(References):

- [1] WANG B L, CUI Y J. Transient inter laminar thermal stress in multi-layered thermoelectric materials[J]. *Applied Thermal Engineering*, 2017(2): 55-67.
- [2] KUMAR D, KUMAR P, RAI K N. A study on DPL model of heat transfer in bi-layer tissues during MFH treatment[J]. *Computers in Biology & Medicine*, 2016, **75**(2): 160-172.
- [3] MATSUMOTO N, OKUNO T, OBARA H, et al. Multi-layer heat conduction analysis using SPH method[J]. *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers*, 2016, **82**(3): 77-82.
- [4] LU S, LIU J, LIN G, et al. Modified scaled boundary finite element analysis of 3D steady-state heat conduction in anisotropic layered media[J]. *International Journal of Heat & Mass Transfer*, 2017, **108**(1): 2462-2471.
- [5] 刘芳, 施卫平. 用格子 Boltzmann 方法模拟非线性热传导方程[J]. *应用数学和力学*, 2015, **36**(11): 1158-1166.(LIU Fang, SHI Weiping. Simulation of the nonlinear heat conduction equation with the lattice Boltzmann method[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2015, **36**(11): 1158-1166.(in Chinese))
- [6] 詹涌强, 张传林. 解抛物型方程的一族高精度隐式差分格式[J]. *应用数学和力学*, 2014, **35**(7): 790-797.(ZHAN Yongqiang, ZHANG Chuanlin. A family of high accuracy implicit difference schemes for solving parabolic equations[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2014, **35**(7): 790-797.(in Chinese))
- [7] 盛宏玉, 李和平, 叶建乔, 等. 介质热传导瞬态分析的一种新半数值解法[J]. *合肥工业大学学报(自然科学版)*, 2010, **33**(5): 709-712.(SHENG Hongyu, LI Heping, YE Jianqiao, et al. A new semi-numerical approach for the transient heat conduction analysis of laminated medium[J]. *Journal of Hefei University of Technology(Natural Science)*, 2010, **33**(5): 709-712.(in Chinese))
- [8] 蓝林华, 富明慧, 刘祚秋. 结构瞬态热传导方程的一种精细解法[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2011, **50**(5): 1-6.(LAN Linhua, FU Minghui, LIU Zuoqiu. A precise solution of transient heat conduction equation for laminate structure[J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2011, **50**(5): 1-6.(in Chinese))
- [9] 李金娥, 王保林, 常冬梅. 材料的非傅里叶热传导及热应力[J]. *固体力学学报*, 2011, **32**(S1): 248-253.(LI Jin'e, WANG Baolin, CHANG Dongmei. Non-Fourier heat conduction and thermal stress of non-Fourier heat conduction an thermal stress of layered materials[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2011, **32**(S1): 248-253.(in Chinese))
- [10] 富明慧, 陈焯智. 层合圆柱三维温度场分析的半解析-精细积分法[J]. *应用力学学报*, 2012, **29**(1): 15-20.(FU Minghui, CHEN Chuozhi. The semi-analytical precise integration method for the analysis of three dimensional temperature field of laminated cylinders[J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 2012, **29**(1): 15-20.(in Chinese))

- [11] LIU K C, WANG Y N, CHEN Y S. Investigation on the bio-heat transfer with the dual-phase-lag effect[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2012, **58**: 29-35.
- [12] MOVAHEDIAN B, BOROOMAND B. The solution of direct and inverse transient heat conduction problems with layered materials using exponential basis functions [J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2014, **77**: 186-198.
- [13] MOHAJER M, AYANI M B, TABRIZI H B. Numerical study of non-Fourier heat conduction in a biolayer spherical living tissue during hyperthermia[J]. *Journal of Thermal Biology*, 2016, **62**: 181-185.
- [14] XU F, LU T J, SEFFEN K A. Bio-thermomechanics of skin tissues[J]. *Journal of the Mechanics & Physics of Solids*, 2008, **56**(5): 1852-1884.
- [15] LIN S M, LI C Y. Analytical solutions of non-Fourier bio-heat conductions for skin subjected to pulsed laser heating[J]. *International Journal of Thermal Sciences*, 2016, **110**: 146-158.
- [16] LIU K C, CHEN H T, CHENG P J. Inverse investigation of non-Fourier heat conduction in tissue[J]. *Journal of Thermal Biology*, 2016, **21**(2): 68-73.

A New Method for Solving Heat Transfer Problems of Laminate Materials Based on the Differential Theory

LI Xixia, DAI Haiyan, LI Changyu

(Guangzhou College of South China University of Technology,
Guangzhou 510800, P.R.China)

Abstract: A new analytical method for solving heat transfer problems of laminate materials was proposed based on the differential theory. The curves of temperature variation at the interface of the laminate material were approximately linear in a small time interval. With the method of separation of variables, the analytical solution containing unknown coefficients of each layer in a small time interval was obtained. According to the continuous condition of energy at the interface, the unknown coefficients of each layer were determined. Then the temperature field in the whole time domain was obtained. Finally, the analytical method was used to solve the heat transfer problem of a 3-layer structure. The analytical results were compared with those of the finite element method, and the influences of several parameters on the temperature field were discussed, with the correctness of the proposed method verified.

Key words: laminate material; heat conduction; separation of variables; differential theory

引用本文/Cite this paper:

李细霞, 戴海燕, 李长玉. 基于微分思想的层合材料传热问题新解法[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(6): 728-736.

LI Xixia, DAI Haiyan, LI Changyu. A new method for solving heat transfer problems of laminate materials based on the differential theory[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(6): 728-736.