ⓒ 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887
http://www.applmathmech.cn

基于 $l_2/l_q(q=2/3)$ 最小化模型的块稀疏信号恢复*

祝德春, 周　珺, 曹满霞, 黄　尉

(合肥工业大学 数学学院, 合肥 230009)

摘要: 该文主要研究了块稀疏信号的恢复问题.利用 q- 块限制等距性质($0<q\leqslant 1$),通过极小化混合 $l_2/l_q(q=2/3)$ 范数,建立了块稀疏信号恢复的一个充分条件,并且得到了在有噪声情形下信号恢复的误差界.通过数值实验,验证了该模型对于块稀疏信号的恢复有较高的成功率.

关　键　词: 压缩感知; 块稀疏恢复; 混合 $l_2/l_q(q=2/3)$ 范数

中图分类号: O174.2　　**文献标志码:** A　　DOI: 10.21656/1000-0887.420009

Block-Sparse Signal Recovery via $l_2/l_q(q=2/3)$ Minimization

ZHU Dechun, ZHOU Jun, CAO Manxia, HUANG Wei

(*School of Mathematics*, *Hefei University of Technology*, *Hefei* 230009, *P.R.China*)

Abstract: The recovery of block-sparse signals was mainly studied. By means of the block restricted q- isometry property (block q- RIP) with $0<q\leqslant 1$, a sufficient condition for block-sparse signal recovery was established through mixed l_2/l_q norm minimization with $q=2/3$, and an error bound for signal recovery in the presence of noise was obtained. Through numerical experiments, it is verified that the model has a high success rate for block-sparse signal recovery.

Key words: compressed sensing; block-sparse recovery; mixed $l_2/l_q(q=2/3)$ norm minimization

引　　言

近年来,压缩感知(compressed sensing)已经成为应用数学和信号处理领域一个非常重要的研究方向.特别是由于其在磁共振(magnetic resonance)[1]和误差校正(error correction)[2]中的成功应用,使得其在科学研究中发挥着越来越重要的作用.在压缩感知中,我们想从欠定方程组中恢复信号 $\boldsymbol{x}\in R^N$,

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi},$$

这里 $\boldsymbol{y}\in R^M$ 是观测向量,$\boldsymbol{A}\in R^{M\times N}$ 是已知的测量矩阵,$\boldsymbol{\xi}$ 代表的是满足 $\|\boldsymbol{\xi}\|_2\leqslant\epsilon(\epsilon\geqslant 0)$ 的噪声向量.我们的目标是通过观测向量 $\boldsymbol{y}$ 和测量矩阵 $\boldsymbol{A}\in R^{M\times N}(M\ll N)$ 来重构未知稀疏信号 $\boldsymbol{x}$.

* **收稿日期:** 2021-01-11; **修订日期:** 2021-04-06
基金项目: 国家自然科学基金重大研究计划(91538112)
作者简介: 祝德春(1996—),男,硕士生(E-mail: 2354544152@qq.com);
周珺(1994—),女,硕士(E-mail: 1812253174@qq.com);
曹满霞(1993—),女,硕士生(E-mail: caomx0809@163.com);
黄尉(1977—),男,教授,博士,硕士生导师(通讯作者. E-mail: whuang@hfut.edu.cn).
引用格式: 祝德春, 周珺, 曹满霞, 黄尉. 基于 $l_2/l_q(q=2/3)$ 最小化模型的块稀疏信号恢复[J]. 应用数学和力学, 2021, **42**(9): 989-998.

在一般的压缩感知中,为了处理标准稀疏模型,我们假设 $\boldsymbol{x}$ 最多有 k 个可以分布在任何位置的非零元素.与常规意义上的一般稀疏信号不同的是,我们分析的信号不仅是稀疏的,而且显示出一些额外的结构,其中非零系数出现在几个块中.块稀疏信号广泛应用于遗传学、通信、图像、计算机视觉等多个领域,更具体地说,包括 DNA 微阵列(DNA microarrays)[3]、彩色成像(color imaging)[4]、运动分割(motion segmentation)[5]等.文献[6-8]中的多项研究表明,块索引集 $\mathcal{J}=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 上的块稀疏向量 $\boldsymbol{x}\in R^N$ 可以表示为

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=[\underbrace{x_1,\cdots,x_{d_1}}_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[1]},\underbrace{x_{d_1+1},\cdots,x_{d_1+d_2}}_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[2]},\cdots,\underbrace{x_{N-d_n+1},\cdots,x_N}_{\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}[n]}],$$

$\boldsymbol{x}[i]$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 块,长度为 d_i,且 $N=\sum_{i=1}^{n}d_i$.定义 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,0}=\sum_{i=1}^{n}I(\|\boldsymbol{x}[i]\|_2>0)$,这里 $I(\cdot)$ 是一个示性函数.如果 $\boldsymbol{x}\in R^N$ 的非零块个数在块索引集 $\mathcal{J}$ 上不超过 k 个,那么我们说信号 $\boldsymbol{x}\in R^N$ 是 k- 块稀疏的(block k-sparse),即 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,0}\leqslant k$.

在本文中,我们考虑从形如 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}$ 的欠定方程组中恢复块稀疏信号 $\boldsymbol{x}\in R^N$,一种直接的方法是解决以下优化问题:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in R^N}\|\boldsymbol{x}\|_{2,0},\qquad \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\epsilon, \tag{1}$$

其中 ϵ 为噪声的上界.然而,解决问题(1)是 NP-hard 的[9].最近有研究表明可以用 l_1 范数对 l_0 范数进行松弛处理[6,10].因此,我们可以引入文献[11-12]中首次提出的凸松弛问题:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in R^N}\|\boldsymbol{x}\|_{2,1},\qquad \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\epsilon,$$

这里

$$\|\boldsymbol{x}\|_{2,1}=\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{x}[i]\|_2$$

是向量 $\boldsymbol{x}$ 的混合 l_2/l_1 范数.为了研究混合 l_2/l_1 范数最小化的理论性能, Eldar 和 Mishali 在文献[12]中引入了块限制等距性质(block RIP).即给定矩阵 $\boldsymbol{A}\in R^{M\times N}$ 且按块索引集 $\mathcal{J}$ 分块,若存在一个非零参数 $\delta_{s|\mathcal{J}}\in(0,1)$,使得对任意按 $\mathcal{J}$ 分块的 s- 块稀疏信号 $\boldsymbol{x}\in R^N$ 满足

$$(1-\delta_{s|\mathcal{J}})\|\boldsymbol{x}\|_2^2\leqslant\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2\leqslant(1+\delta_{s|\mathcal{J}})\|\boldsymbol{x}\|_2^2,$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足以参数为 $\delta_{s|\mathcal{J}}$ 的块限制等距性质,且块限制等距常数 $\delta_{s|\mathcal{J}}$ 定义为对所有 s- 块稀疏信号 $\boldsymbol{x}\in R^N$,使得上式成立的最小正数 δ.此外,许多研究[13-15]表明,$l_q(0<q\leqslant1)$ 范数最小化比 l_1 范数有更好的性能,可以从更少的线性测量中精确恢复稀疏信号.而 $l_q(0<q\leqslant1)$ 范数是一种非凸的优化模型,非凸优化具有很广泛的应用[16-17].自然地,我们考虑以下优化问题:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in R^N}\|\boldsymbol{x}\|_{2,q},\qquad \|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\epsilon, \tag{2}$$

其中

$$\|\boldsymbol{x}\|_{2,q}=\left(\sum_{i=1}^{n}\|\boldsymbol{x}[i]\|_2^q\right)^{1/q},\qquad 0<q\leqslant1$$

是向量 $\boldsymbol{x}$ 的混合 l_2/l_q 范数.

关于 $l_q(0<q\leqslant1)$ 正则化问题:

$$\min_{\boldsymbol{x}\in R^N}\{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|_2^2+\lambda\|\boldsymbol{x}\|_q^q\},$$

这里 $\lambda>0$ 是正则化参数,在稀疏信号恢复(sparse signal recovery)[18-20]和低秩矩阵补全(low-rank matrix completion)[21-22]中得到了广泛的研究.近年来,Cao 等[23]提出了一种基于 $l_{2/3}$ 正则化公式的快速图像反卷积算法.Zhang 等[24]讨论了 $l_{2/3}$ 正则化问题的迭代阈值算法的收敛性问题.Wang 等[25]提出了一种快速高效的基于 $l_{2/3}$ 正则化的矩阵补全方法.受 $l_{2/3}$ 正则化的闭合形式公式的启发,在本文中,我们讨论了混合 $l_2/l_q(q=2/3)$ 范数极小化的块稀疏信号恢复问题.特别地,建立了块稀疏信号鲁棒恢复的一个充分条件.

本文的结构如下:第 1 节中,我们介绍了一些符号和一个有用的引理;第 2 节中,对于 $q=2/3$,我们给出了块稀疏信号鲁棒恢复的一个 q- 块限制等距性质(block q- RIP)条件;第 3 节进行了数值模拟实验;第 4 节对全文进行了总结.

1　符号和定理

在本文中,我们采用以下的符号.给定一个测量矩阵 $\boldsymbol{A}\in R^{M\times N}$,$[n]$ 表示整数 $\{1,2,\cdots,n\}$ 的集合.给定一个块索引集 $\varOmega=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$,对于建立在块索引集 $\varOmega$ 上的任意的 $\boldsymbol{x}\in R^N$,令 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,0}$ 表示关于 $\boldsymbol{x}$ 的混合 l_2/l_0 范数,定义为 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,0}=\sum_{i=1}^{n}I(\|\boldsymbol{x}[i]\|_2>0)$,其中 $I(\cdot)$ 是示性函数,$\boldsymbol{x}[i]$ 表示在块索引集 $\varOmega$ 上 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 块.对于任意的 $\boldsymbol{x}\in R^N$, 我们定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\{x_i\},\quad \|\boldsymbol{x}\|_{-\infty}=\min_{1\leqslant i\leqslant N}\{x_i\}.$$

如果向量 $\boldsymbol{x}\in R^N$ 位于子空间的结构中,我们则定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_{2,\infty}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\|\boldsymbol{x}[i]\|_2\},\quad \|\boldsymbol{x}\|_{2,-\infty}=\min_{1\leqslant i\leqslant n}\{\|\boldsymbol{x}[i]\|_2\}.$$

事实上,因为 $\|\cdot\|_{-\infty}$ 和 $\|\cdot\|_{2,-\infty}$ 三角不等式不成立,所以它们不是真正的范数.关于混合 $l_2/l_q(0<q\leqslant 1)$ 范数,在块索引集 $\varOmega$ 上 $\boldsymbol{x}\in R^N$ 的最佳 s- 块稀疏项逼近误差如下所示:

$$\sigma_s(\boldsymbol{x})_{2,q}:=\inf_{\|\boldsymbol{v}\|_{2,0}\leqslant s}\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{v}\|_{2,q}.$$

显而易见,如果 $\|\boldsymbol{x}\|_{2,0}\leqslant s$,那么 $\sigma_s(\boldsymbol{x})_{2,q}=0$.

下面的引理在我们分析 $q=2/3$ 的混合 l_2/l_q 范数极小化问题的解时起关键作用.

引理 1[26]　对于 $q=2/3$ 和 $\boldsymbol{x}\in R^N$, 可以得到

$$\|\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\frac{\|\boldsymbol{x}\|_q}{\|\boldsymbol{x}\|_0^{1/q-1/2}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{x}\|_0}{3}}(\|\boldsymbol{x}\|_{\infty}^q-\|\boldsymbol{x}\|_{-\infty}^q)^{1/q}.$$

注 1　我们将上述不等式推广到块稀疏的情况,自然地,对于 $q=2/3$, 得到了不等式

$$\|\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\frac{\|\boldsymbol{x}\|_{2,q}}{\|\boldsymbol{x}\|_{2,0}^{1/q-1/2}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{x}\|_{2,0}}{3}}(\|\boldsymbol{x}\|_{2,\infty}^q-\|\boldsymbol{x}\|_{2,-\infty}^q)^{1/q}$$

对于在 $\varOmega=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 上的任意向量 $\boldsymbol{x}\in R^N$ 都成立.

证明　假设在块索引集 $\varOmega$ 上,$\boldsymbol{x}$ 分解为一系列向量 $\boldsymbol{x}[1],\boldsymbol{x}[2],\cdots,\boldsymbol{x}[n]$, 令

$$\boldsymbol{d}=\{\|\boldsymbol{x}[1]\|_2,\|\boldsymbol{x}[2]\|_2,\cdots,\|\boldsymbol{x}[n]\|_2\},$$

对于任意的 $j\in[n]$,有 $d_j=\|\boldsymbol{x}[j]\|_2$, 因此可以得到

$$\|\boldsymbol{d}\|_2=\left(\sum_{j=1}^{n}\|\boldsymbol{x}[j]\|_2^2\right)^{1/2}=\|\boldsymbol{x}\|_2,\quad \|\boldsymbol{d}\|_q=\left(\sum_{j=1}^{n}\|\boldsymbol{x}[j]\|_2^q\right)^{1/q}=\|\boldsymbol{x}\|_{2,q},$$

$$\|\boldsymbol{d}\|_{\infty}=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{\|\boldsymbol{x}[j]\|_2\}=\|\boldsymbol{x}\|_{2,\infty},\quad \|\boldsymbol{d}\|_{-\infty}=\min_{1\leqslant j\leqslant n}\{\|\boldsymbol{x}[j]\|_2\}=\|\boldsymbol{x}\|_{2,-\infty}.$$

从引理 1 可以得出

$$\|\boldsymbol{d}\|_2\leqslant\frac{\|\boldsymbol{d}\|_q}{\|\boldsymbol{d}\|_0^{1/q-1/2}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{d}\|_0}{3}}(\|\boldsymbol{d}\|_{\infty}^q-\|\boldsymbol{d}\|_{-\infty}^q)^{1/q},$$

即

$$\|\boldsymbol{x}\|_2\leqslant\frac{\|\boldsymbol{x}\|_{2,q}}{\|\boldsymbol{x}\|_{2,0}^{1/q-1/2}}+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{x}\|_{2,0}}{3}}(\|\boldsymbol{x}\|_{2,\infty}^q-\|\boldsymbol{x}\|_{2,-\infty}^q)^{1/q}.$$

证毕. □

2　q- 块限制等距性质和块稀疏恢复

在本节中,我们将根据 $q=2/3$ 的 q- 块限制等距性质的定义,建立块稀疏信号恢复的充分条件,得到原信号 $\boldsymbol{x}$ 在 $\varOmega$ 上是块可压缩,且得到测量向量包含噪声时的误差界限.首先,Chartrand 和 Staneva[27] 定义了 q- 限制等距常数(q- RIC),随后 Wang 等[9] 提出了 q- 块限制等距性质.

定义 1(q- 块限制等距性质)[9]　给定矩阵 $\boldsymbol{A}\in R^{M\times N}$ 和正整数 s,若存在常数 $\delta_{s|\varOmega}\in(0,1)$,使得对任意按 $\varOmega$ 分块的 s- 块稀疏向量 $\boldsymbol{x}\in R^N$ 满足

$$(1-\delta_{s|\Gamma})\|\boldsymbol{x}\|_2^q \leqslant \|\boldsymbol{Ax}\|_q^q \leqslant (1+\delta_{s|\Gamma})\|\boldsymbol{x}\|_2^q,$$

则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 在 Γ 上满足以参数为 $\delta_{s|\Gamma}$ 的 s 阶的 q- 块限制等距性质.

定理 1 假设 $\bar{\boldsymbol{x}} \in R^N$, $\|\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{y}\|_2 \leqslant \epsilon$ 是按 $\Gamma=\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$ 分块的 s- 块稀疏向量.令 s_1,s_2 是正整数,且满足当 $q=2/3$ 时,$s_1 \geqslant s$,$2^q s_2 \geqslant (3\sqrt{3})^q(2s-s_1)$.若矩阵 $\boldsymbol{A} \in R^{M\times N}$ 满足 q- 块限制等距性质且

$$\delta_{s_1|\Gamma}+(1+\delta_{s_2|\Gamma})s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1 s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)<1.$$

那么,当 $q=2/3$ 时,问题(2) 的解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 满足

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|_2^q \leqslant C_1\epsilon^q + C_2\sigma_s(\bar{\boldsymbol{x}})_{2,q}^q, \tag{3}$$

这里

$$C_1 := \frac{2^q M^{1-q/2}\left(1+s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1 s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\right)}{1-\delta_{s_1|\Gamma}-(1+\delta_{s_2|\Gamma})\,s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1 s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)},$$

$$C_2 := \frac{2s_2^{q/2-1}(1+\delta_{s_2|\Gamma})\left(1+s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1 s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\right)}{1-\delta_{s_1|\Gamma}-(1+\delta_{s_2|\Gamma})\,s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1 s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)}+2s_2^{q/2-1}.$$

注 2 当 $q=2/3$ 时,对于混合 l_2/l_q 范数最小化问题,我们提出了一个新的 q- 块限制等距性质条件,以保证块稀疏信号的精确和鲁棒恢复,这个结果不同于文献[28]提出的条件.即通过 $b>1$ 和 $a=b^{2/(2-q)}$ 建立了条件 $\delta_{ak}+b\delta_{s+(a+1)k}<b-1$,其中 ak 是整数且 $0<q\leqslant 1$.

注 3 现在我们给出一个具体的结果,令 $s_1=2s$,$s_2=s$,对于 $q=2/3$, 可以得到

$$s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1 s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}.$$

当

$$\left(1+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)\delta_{2s|\Gamma}<1-\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$$

时,可以得到

$$\delta_{2s|\Gamma}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\delta_{s|\Gamma}<\left(1+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)\delta_{2s|\Gamma}<1-\frac{\sqrt[3]{2}}{3},$$

所以保证

$$\delta_{2s|\Gamma}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}(1+\delta_{s|\Gamma})<1.$$

因此,在

$$\delta_{2s|\Gamma}<\frac{1-\frac{\sqrt[3]{2}}{3}}{1+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}}\approx 0.408\,5$$

条件下,我们得到当 $q=2/3$ 时,问题(2) 的解 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 满足

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|_2^{2/3} \leqslant C_1\epsilon^{2/3} + C_2\sigma_s(\bar{\boldsymbol{x}})_{2,2/3}^{2/3},$$

这里 C_1,C_2 的定义如下:

$$C_1:=\frac{(2M)^{2/3}\left(1+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)}{\left(1-\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)-\left(1+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)\delta_{2s|\mathcal{J}}},$$

$$C_2:=\frac{2s^{-2/3}\left(1+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)(1+\delta_{s|\mathcal{J}})}{\left(1-\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)-\left(1+\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)\delta_{2s|\mathcal{J}}}+2s^{-2/3}.$$

定理 1 的证明　令 $\boldsymbol{h}=\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}$,$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是原始信号且在 $\mathcal{J}$ 上分块,$\hat{\boldsymbol{x}}$ 是当 $q=2/3$ 时混合 l_2/l_q 范数极小化模型的解. 我们假设 Ω 表示向量 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 的前最大 s 块上的块索引集,$T=\{1,2,\cdots,s\}$. 假设(若必要可重新排列) $\|\boldsymbol{h}[1]\|_2\geqslant\|\boldsymbol{h}[2]\|_2\geqslant\cdots\geqslant\|\boldsymbol{h}[n]\|_2$.证明分为以下四个步骤.

第一步　估计 $\|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q$ 的上界.

因为 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是 $q=2/3$ 时模型(2)的最小值,我们得到

$$\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_{2,q}^q=\|\bar{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{h}\|_{2,q}^q=\|\bar{\boldsymbol{x}}_\Omega+\boldsymbol{h}_\Omega\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}}+\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\geqslant$$
$$\|\bar{\boldsymbol{x}}_\Omega\|_{2,q}^q-\|\boldsymbol{h}_\Omega\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q-\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q,$$

其中上标 C 表示补集.因为 $\|\hat{\boldsymbol{x}}\|_{2,q}^q\leqslant\|\bar{\boldsymbol{x}}\|_{2,q}^q$, 得到

$$\|\bar{\boldsymbol{x}}\|_{2,q}^q\geqslant\|\bar{\boldsymbol{x}}_\Omega\|_{2,q}^q-\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q-\|\boldsymbol{h}_\Omega\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q,$$

这表明

$$\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\leqslant\|\boldsymbol{h}_\Omega\|_{2,q}^q+2\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q. \tag{4}$$

因为 $\Omega^{\mathrm{C}}\cap T$ 和 $\Omega\cap T^{\mathrm{C}}$ 具有相同的基数 $s-|\Omega\cap T|$, 因此我们得到

$$\|\boldsymbol{h}_{\Omega\cap T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\leqslant\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}\cap T}\|_{2,q}^q. \tag{5}$$

结合式(4)和(5),得到

$$\|\boldsymbol{h}_T\|_{2,q}^q=\|\boldsymbol{h}_{\Omega\cap T}\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}\cap T}\|_{2,q}^q=\|\boldsymbol{h}_\Omega\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}\cap T}\|_{2,q}^q-\|\boldsymbol{h}_{\Omega\cap T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\geqslant$$
$$-2\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}\cap T}\|_{2,q}^q-\|\boldsymbol{h}_{\Omega\cap T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q=$$
$$-2\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}\cap T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q+2\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}\cap T}\|_{2,q}^q-\|\boldsymbol{h}_{\Omega\cap T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q=$$
$$-2\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q+2\|\boldsymbol{h}_{\Omega^{\mathrm{C}}\cap T}\|_{2,q}^q-2\|\boldsymbol{h}_{\Omega\cap T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\geqslant$$
$$-2\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q+\|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q.$$

因此,我们得到

$$\|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\leqslant\|\boldsymbol{h}_T\|_{2,q}^q+2\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q. \tag{6}$$

第二步　估计 $\|\boldsymbol{Ah}\|_q^q$ 的上界.

考虑到 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 都满足约束 $\|\boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{y}\|_2\leqslant\epsilon$, 显然

$$\|\boldsymbol{Ah}\|_2=\|\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}\|_2\leqslant\|\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{y}\|_2+\|\boldsymbol{A}\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{y}\|_2\leqslant 2\epsilon,$$

利用 Hölder 不等式,得到

$$\|\boldsymbol{Ah}\|_q^q\leqslant\left(\sum_{i=1}^M(|(\boldsymbol{Ah})_i|^q)^{2/q}\right)^{q/2}\cdot\left(\sum_{i=1}^M 1\right)^{1-q/2}=M^{1-q/2}\|\boldsymbol{Ah}\|_2^q,$$

因此

$$\|\boldsymbol{Ah}\|_q^q\leqslant M^{1-q/2}(2\epsilon)^q. \tag{7}$$

第三步　估计 $\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_2^q$ 的上界.

首先,我们将 $[n]$ 划分为以下集合:

$$T_0=\{1,2,\cdots,s_1\},\ T_1=\{s_1+1,s_1+2,\cdots,s_1+s_2\},$$
$$T_2=\{s_1+s_2+1,s_1+s_2+2,\cdots,s_1+2s_2\},\cdots.$$

由引理 1 不难得出

$$\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_2 \leqslant \frac{\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}}{s_2^{1/q-1/2}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\left(\|\boldsymbol{h}[s_1+(j-1)s_2+1]\|_2^q - \|\boldsymbol{h}[s_1+js_2]\|_2^q\right)^{1/q},$$

这里 $q=2/3$.因为$(a_1+a_2+\cdots+a_N)^q \leqslant a_1^q+a_2^q+\cdots+a_N^q$ 对非负常数 $a_1,a_2,\cdots,a_N$ 成立,则不等式

$$\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_2^q \leqslant \frac{\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}^q}{s_2^{1-q/2}} + \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\left(\|\boldsymbol{h}[s_1+(j-1)s_2+1]\|_2^q - \|\boldsymbol{h}[s_1+js_2]\|_2^q\right)$$

对任意 $j\geqslant 1$ 都成立,然后得到

$$\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_2^q \leqslant \frac{\sum\limits_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}^q}{s_2^{1-q/2}} + \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\sum_{j\geqslant 1}\left(\|\boldsymbol{h}[s_1+(j-1)s_2+1]\|_2^q - \|\boldsymbol{h}[s_1+js_2]\|_2^q\right) \leqslant$$

$$s_2^{q/2-1}\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}^q + \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\|\boldsymbol{h}[s_1+1]\|_2^q.$$

因为

$$\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}^q = \|\boldsymbol{h}_{T_0^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q = \|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q - \sum_{j=1}^{s_1-s}\|\boldsymbol{h}[s+j]\|_2^q,$$

我们得到

$$\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_2^q \leqslant s_2^{q/2-1}\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}^q + \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\|\boldsymbol{h}[s_1+1]\|_2^q \leqslant$$

$$s_2^{q/2-1}\left(\|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q - \sum_{j=1}^{s_1-s}\|\boldsymbol{h}[s+j]\|_2^q\right) + \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\|\boldsymbol{h}[s_1+1]\|_2^q.$$

由式(6)和

$$\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_{2,q}^q \leqslant s_1^{1-q/2}\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q,$$

可以得到

$$\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_2^q \leqslant s_2^{q/2-1}\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_{2,q}^q + \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\|\boldsymbol{h}[s_1+1]\|_2^q \leqslant$$

$$s_2^{q/2-1}\left(\|\boldsymbol{h}_{T^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q - \sum_{j=1}^{s_1-s}\|\boldsymbol{h}[s+j]\|_2^q\right) + \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\|\boldsymbol{h}[s_1+1]\|_2^q \leqslant$$

$$s_2^{q/2-1}\left(\|\boldsymbol{h}_T\|_{2,q}^q + 2\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q - (s_1-s)\|\boldsymbol{h}[s_1+1]\|_2^q\right) + \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\|\boldsymbol{h}[s_1+1]\|_2^q \leqslant$$

$$s_2^{q/2-1}\left(\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_{2,q}^q + 2\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q - 2(s_1-s)\|\boldsymbol{h}[s_1+1]\|_2^q\right) + \left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\|\boldsymbol{h}[s_1+1]\|_2^q \leqslant$$

$$s_2^{q/2-1}\left(\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_{2,q}^q + 2\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\right) + \left(\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q - \frac{2(s_1-s)}{s_2^{1-q/2}}\right)\frac{\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_{2,q}^q}{s_1} \leqslant$$

$$\left(s_2^{q/2-1} - \frac{2(s_1-s)}{s_1 s_2^{1-q/2}} + \frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_{2,q}^q + 2s_2^{q/2-1}\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q \leqslant$$

$$s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1} - \frac{2(s_1-s)}{s_1 s_2^{1-q/2}} + \frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q + 2s_2^{q/2-1}\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q. \tag{8}$$

第四步 估计 $\|\hat{\boldsymbol{x}}-\bar{\boldsymbol{x}}\|_2$的误差.

接下来,我们估计 $\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q$的上界.根据 q- 块限制等距性质的定义,得到

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}\|_q^q \geqslant \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{T_0}\|_q^q - \left\|\sum_{j\geqslant 1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{h}_{T_j}\right\|_q^q \geqslant$$

$$(1-\delta_{s_1|\mathcal{J}})\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q - (1+\delta_{s_2|\mathcal{J}})\sum_{j\geqslant 1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_2^q \geqslant$$

$$(1-\delta_{s_1|\varOmega})\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q-(1+\delta_{s_2|\varOmega})\left[s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\times\right.$$

$$\left.\|h_{T_0}\|_2^q+2s_2^{q/2-1}\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\varOmega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\right]\geqslant$$

$$\left[1-\delta_{s_1|\varOmega}-(1+\delta_{s_2|\varOmega})s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\right]\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q-$$

$$2s_2^{q/2-1}(1+\delta_{s_2|\varOmega})\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\varOmega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q. \tag{9}$$

注意到

$$1-\delta_{s_1|\varOmega}-(1+\delta_{s_2|\varOmega})s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)>0,$$

因此我们得到

$$\delta_{s_1|\varOmega}+(1+\delta_{s_2|\varOmega})s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)<1.$$

结合式(7)和(9),我们得到

$$\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q\leqslant\frac{M^{1-q/2}(2\epsilon)^q}{1-\delta_{s_1|\varOmega}-(1+\delta_{s_2|\varOmega})s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)}+$$

$$\frac{2s_2^{q/2-1}(1+\delta_{s_2|\varOmega})\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\varOmega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q}{1-\delta_{s_1|\varOmega}-(1+\delta_{s_2|\varOmega})s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)}.$$

令

$$A:=\frac{M^{1-q/2}}{1-\delta_{s_1|\varOmega}-(1+\delta_{s_2|\varOmega})s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)},$$

$$B:=\frac{2s_2^{q/2-1}(1+\delta_{s_2|\varOmega})}{1-\delta_{s_1|\varOmega}-(1+\delta_{s_2|\varOmega})s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)},$$

则

$$\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q\leqslant A(2\epsilon)^q+B\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\varOmega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q.$$

所以得到

$$\|\boldsymbol{h}\|_2^q\leqslant\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q+\|\boldsymbol{h}_{T_0^{\mathrm{C}}}\|_2^q=$$

$$\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q+\left\|\sum_{j\geqslant1}\boldsymbol{h}_{T_j}\right\|_2^q\leqslant\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q+\sum_{j\geqslant1}\|\boldsymbol{h}_{T_j}\|_2^q\leqslant$$

$$\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q+s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q+2s_2^{q/2-1}\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\varOmega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\leqslant$$

$$\left(1+s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\right)\|\boldsymbol{h}_{T_0}\|_2^q+2s_2^{q/2-1}\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\varOmega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\leqslant$$

$$\left(1+s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1}-\frac{2(s_1-s)}{s_1s_2^{1-q/2}}+\frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\right)(A(2\epsilon)^q+B\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\varOmega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q)+$$

$$2s_2^{q/2-1}\|\bar{\boldsymbol{x}}_{\varOmega^{\mathrm{C}}}\|_{2,q}^q\leqslant$$

$$C_1\epsilon^q + C_2 \| \bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^C} \|_{2,q}^q .$$

结合事实 $\| \bar{\boldsymbol{x}}_{\Omega^C} \|_{2,q}^q = \sigma_s(\bar{\boldsymbol{x}})_{2,q}^q$, 所以不等式(3)成立.这里

$$C_1 := 2^q A\left(1 + s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1} - \frac{2(s_1 - s)}{s_1 s_2^{1-q/2}} + \frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\right),$$

$$C_2 := B\left(1 + s_1^{1-q/2}\left(s_2^{q/2-1} - \frac{2(s_1 - s)}{s_1 s_2^{1-q/2}} + \frac{1}{s_1}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s_2}{3}}\right)^q\right)\right) + 2s_2^{q/2-1}.$$

证毕. □

3 数值模拟试验

为了验证本文的模型对于块稀疏信号的重构能力,我们进行了相关的数值模拟实验.采用交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers, ADMM)[29]来解决问题(2).ADMM 是一种求解优化问题的计算框架,通过将大的全局问题分解为多个较小,较易求解的局部子问题,并通过对子问题的解进行协调而得到大的全局问题的解.对于问题(2),我们把它改写成 ADMM 的形式:

$$\min f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{z}), \qquad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0},$$

其中 $f(\boldsymbol{x}) = \| \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|_2$, $g(\boldsymbol{z}) = \lambda \| \boldsymbol{z} \|_{2,q}$, $\lambda > 0$ 是正则化参数.为了使算法更加稳定,引入 Lagrange 算子 $\boldsymbol{u}$, 增广 Lagrange 表达式为

$$L_\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}) = f(\boldsymbol{x}) + g(\boldsymbol{z}) + \frac{\rho}{2} \| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} + \boldsymbol{u} \|_2^2,$$

其中 $\rho > 0$.算法的迭代过程表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_{k+1} = \arg\min_{\boldsymbol{x}} L_\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}_k, \boldsymbol{u}_k), \\ \boldsymbol{z}_{k+1} = \arg\min_{\boldsymbol{z}} L_\rho(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}_k), \\ \boldsymbol{u}_{k+1} = \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{x}_{k+1} - \boldsymbol{z}_{k+1}. \end{cases}$$

在进行数值实验时,首先生成一个 Gauss 随机矩阵 $\boldsymbol{A} \in R^{M\times N}$, 且对列做归一化处理.给定块向量的长度为 d, 随机选取 s 个块,分别在 s 个块中赋予非零值,赋值的幅度采用 Gauss 分布信号,得到块稀疏信号 $\boldsymbol{x}$.取 $M = 128$, $N = 404\,8$, $d = 4$, $s = 12$, 块 -$l_2/l_{2/3}$ 的实验结果如图 1 所示,在计算过程中进行外部迭代 30 次,内部迭代 1 000 次,计算的停止条件取绝对误差 $\epsilon^{\text{abs}} = 10^{-7}$, 相对误差 $\epsilon^{\text{rel}} = 10^{-5}$.“ * ”代表原始信号,“o”代表重构信号,重构信号对于原始信号的覆盖度越高说明恢复效果越好.

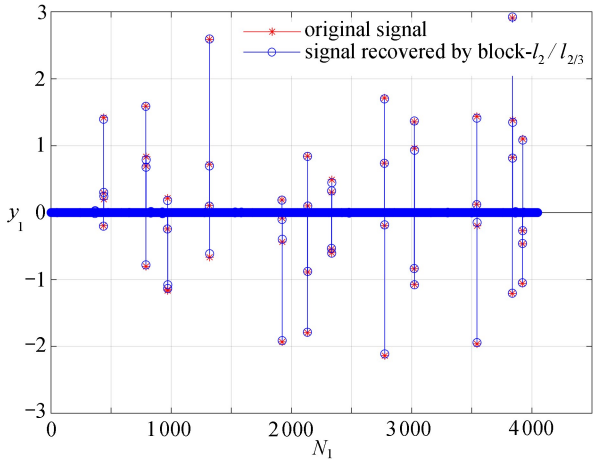

图 1 块 -$l_2/l_{2/3}$ 对原始信号的恢复率

Fig. 1 Recovery rates of block -$l_2/l_{2/3}$ to original signals

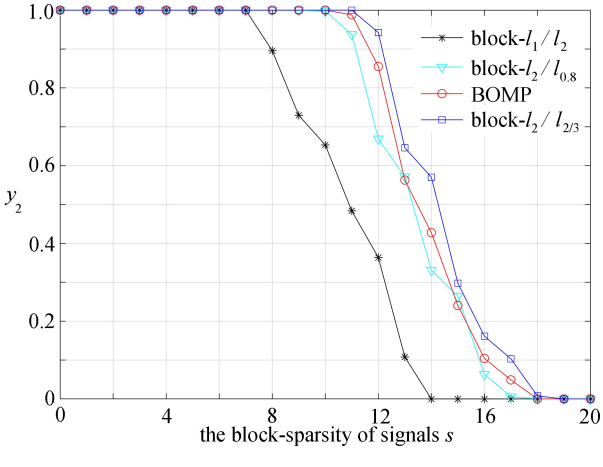

图 2 算法重构成功率随块稀疏度的变化曲线

Fig. 2 The curves of the reconstruction success rate vs. the block sparsity

为了更加直观地进行比较,我们与块 $-l_1/l_2$,块 $-l_2/l_q(q = 0.8)$ 和块正交匹配追踪算法(block orthogonal matching pursuit,BOMP)进行了对比.对于重构信号 $\bar{\boldsymbol{x}}$, 如果满足

$$\frac{\|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_2}{\|\boldsymbol{x}\|_2} < 10^{-4},$$

则表示重构成功.对于每个稀疏度 s, 每种算法运行 300 次,计算并记录算法的重构成功率.实验结果如图 2 所示.横坐标代表信号的稀疏度,纵坐标表示算法的重构成功率.取 $M = 128, N = 2\,048, d = 4$, 可以发现,基于本文的模型,对于块稀疏信号的恢复成功率更高.

4　总　　结

本文研究了基于非凸优化方法下的块稀疏信号的恢复问题.我们主要考虑了在块稀疏情况下,通过极小化混合 $l_2/l_q(q = 2/3)$ 范数得到块稀疏信号恢复的一个充分条件.应该指出的是,我们的工作中还有许多不足之处.本文的结论是建立在 $q = 2/3$ 的情形下,因此,如何在更宽广的 q 的取值范围下,得到一个更普遍的结论将是我们今后的努力方向.

参考文献(References):

[1] HALDAR J, HERNANDO D, LIANG Z. Compressed-sensing MRI with random encoding[J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2011, **30**(4): 893-903.

[2] CANDES E J, TAO T. Decoding by linear programming[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2005, **51**(12): 4203-4215.

[3] PARVARESH F, VIKALO H, MISRA S, et al. Recovering sparse signals using sparse measurement matrices in compressed DNA microarrays[J]. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 2008, **2**(3): 275-285.

[4] MAIUMDAR A, WARD R. Compressed sensing of color images[J]. *Signal Processing*, 2010, **90**(12): 3122-3127.

[5] VIDAL R, MA Y. A unified algebraic approach to 2-D and 3-D motion segmentation and estimation[J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2006, **25**(3): 403-421.

[6] LIN J, LI S. Block sparse recovery via mixed l_2/l_1 minimization[J]. *Acta Mathematica Sinica*, 2013, **29**(7): 1401-1412.

[7] CHEN W, LI Y. The high order block RIP condition for signal recovery[J]. *Journal of Computational Mathematics*, 2019, **37**(1): 61-75.

[8] HUANG J, WANG J, WANG W, et al. Sharp sufficient condition of block signal recovery via l_2/l_1-minimization[J]. *IET Signal Processing*, 2017, **13**(5): 495-505.

[9] WANG Y, WANG J, XU Z. Restricted p-isometry properties of nonconvex block-sparse compressed sensing [J]. *Signal Processing*, 2014, **104**: 188-196.

[10] STOJNIC M, PARVARESH F, HASSIBI B. On the reconstruction of block-sparse signals with an optimal number of measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2009, **57**(8): 3075-3085.

[11] ELDAR Y C, KUPPINGER P, BOLCSKEI H. Block-sparse signals: uncertainty relations and efficient recovery [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010, **58**(6): 3042-3054.

[12] ELDAR Y C, MISHALI M. Robust recovery of signals from a structured union of subspaces[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(11): 5302-5316.

[13] ZHOU S, KONG L, LUO Z, et al. New RIC bounds via l_q -minimization with $0 < q \leqslant 1$ in compressed sensing [R/OL].(2013-08-02)[2021-07-05]. https://arxiv.org/abs/1308.0455.

[14] DAVIES M E, GRIBONVAL R. Restricted isometry constants where l_p sparse recovery can fail for $0<p\leqslant 1$[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2009, **55**(5): 2203-2214.

[15] FOUCART S. A note on guaranteed sparse recovery via l_q-minimization[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2010, **29**(1): 97-103.

[16] 赵丹, 孙祥凯. 非凸多目标优化模型的一类鲁棒逼近最优性条件[J]. 应用数学和力学, 2019, **40**(6): 694-700. (ZHAO Dan, SUN Xiangkai. Some robust approximate optimality conditions for nonconvex multi-objective optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2019, **40**(6): 694-700.(in Chinese))

[17] 王欣, 郭科. 一类非凸优化问题广义交替方向法的收敛性[J]. 应用数学和力学, 2018, **39**(12): 1410-1425. (WANG Xin, GUO Ke. Convergence of the generalized alternating direction method of multipliers for a class of nonconvex optimization problems[J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2018, **39**(12): 1410-1425.(in Chinese))

[18] DONOHO D L. Compressed sensing[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(4): 1289-1306.

[19] CANDES E J, ROMBERG J, TAO T. Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 2006, **52**(2): 489-509.

[20] CANDES E J, WAKIN M B, BOYD S P. Enhancing sparsity by reweighted l_1 minimization[J]. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, 2008, **14**(5): 877-905.

[21] NIE F P, WANG H, HUANG H, et al. Joint Schatten p-norm and l_p-norm robust matrix completion for missing value recovery[J]. *Knowledge and Information Systems*, 2015, **42**(3): 525-544.

[22] NIE F P, HUANG H, DING C. Low-rank matrix recovery via efficient Schatten p-norm minimization[C]// *Proceedings of the Twenty-Sixth AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2012: 655-661.

[23] CAO W F, SUN J, XU Z B. Fast image deconvolution using closed-form thresholding formulas of $L_q(q = 1/2, 2/3)$ regularization[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2013, **24**(1): 31-41.

[24] ZHANG Y, YE W Z. $L_{2/3}$ regularization: convergence of iterative thresholding algorithm[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 2015, **33**: 350-357.

[25] WANG Z, GAO C, LUO X H, et al. Accelerated inexact matrix completion algorithm via closed-form q-thresholding ($q=1/2,2/3$) operator[J]. *International Journal of Machine Learning and Cybernetics*, 2020, **11**: 2327-2339.

[26] LAI M, LIU L. A new estimate of restricted isometry constants for sparse solutions[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2011, **30**(3): 402-406.

[27] CHARTRAND R, STANEVA V. Restricted isometry properties and nonconvex compressive sensing[J]. *Inverse Problems*, 2010, **24**(3): 657-682.

[28] HE S, WANG Y, WANG J, et al. Block-sparse compressed sensing with partially known signal support via non-convex minimization[J]. *IET Signal Processing*, 2016, **10**(7): 717-723.

[29] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. *Foundations Trends in Machine Learning*, 2011, **3**(1): 1-122.