文章编号:1000-0887(2012)05-0513-13

ⓒ 应用数学和力学编委会,ISSN 1000-0887

频域有限元计算的扩展面向目标误差估计*

林治家, 由小川, 庄 茁

(清华大学 航天航空学院 应用力学实验室, 北京 100084)

摘要: 研究了针对频域有限元直接动态分析的面向目标误差估计以及误差范围估计计算方法. 面向目标的误差估计方法就是专门针对如何准确和经济地估算特定值误差的一种方法,利用原问题的共轭偶问题进行计算. 频域有限元的直接动态分析是模拟频域扫描实验的一种计算方法,专门针对谐振激励的线性动态响应问题,利用将原自由度分解为实部和虚部描述频率的变化,从而计算变形体的动态响应. 利用扩展针对有限元的面向目标误差估计的自由度,将该方法应用到直接动态分析中进行误差估计. 通过建立同时包含实部和虚部自由度的能量弱形式及偶问题,并将其数值实现,估算频域直接动态分析有限元解的误差及误差范围,并通过悬臂梁的激振算例进行了验证.

关 键 词: 面向目标误差估计; 有限元方法; 直接动态分析; 频域

中图分类号: O241.1; O242.21 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.05.001

引 言

随着计算机技术的迅猛发展,数值模拟在现代产品设计流程中扮演了越来越重要的角色. 特别是大规模并行计算的发展正促使现代工程领域的研制方式发生一场深刻变革. 结构的动态响应实验主要通过频域分析进行,而谐波激振是最基本的检测手段之一[1]. 频域有限元直接动态分析方法是一种在一定频域范围内进行谐波激励从而求得仿真问题的线性动态响应的方法. 它直接计算模型的物理自由度来获得模型的动态响应,无需求助于特征值计算,而是通过将物理自由度扩展为复数来引入不同频率的影响. 然而,目前国内外绝大多数产品设计仍然主要依赖于试验(一般是全系统和子系统试验),数值模拟结果通常并不能直接作为设计依据,因为在获得试验结果以前,分析人员并不能确切地知道其置信度,大规模的数值模拟以及模型修正技术并不能确保高置信度,数值模拟结果的置信度仍然需要被严格量化.

面向目标的误差估计方法是一种形成于 20 世纪 90 年代的误差分析方法, Prudhomme 和 Oden 等[2-3], Ladeveze[4] 以及 Bathe 等[5] 都曾进行过该方面理论的研究. 面向目标误差估计是专门针对如何准确和经济地估算特定值误差的一种方法,利用建立与原问题共轭的偶问题,估计有限元离散解的误差. 这种方法目前在时域有限元分析中获得了很多应用,如 Schleupen 等

* **收稿日期:** 2011-08-11; **修订日期:** 2012-02-08

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10876100)

作者简介: 林治家(1984—),男,大连人,博士生(E-mail: lin-zj07@mails.tsinghua.edu.cn);
庄茁(1952—),男,沈阳人,教授,博士(联系人. Tel: +86-10-62783014; E-mail: zhuangz@tsinghua.edu.cn)

将其用于弹性动力学[6],Larsson 等将其扩展到一些非线性弹性模型中[7]. 对于其他数值计算,该方法也有很好的效果,如 van der Zee 等将其用于分型计算[8],在相变仿真方面也有应用[9]. 但极少有将该方法与频域分析相结合的研究.

本文通过扩展针对有限元的面向目标误差估计方法的自由度,利用同时包含实部和虚部的能量方程弱形式,建立了这种频域有限元问题的直接动态分析方法误差估计的偶问题,从而估算了这种线性摄动计算的误差和误差范围. 下文将详细介绍频域有限元直接动态分析方法和面向目标误差估计方法的基本原理,然后介绍针对复数化而扩展自由度的扩展面向目标误差估计方法的构造,最后通过悬臂梁自由端受谐波激励的算例验证估算误差和误差范围的准确性.

1 计算理论

1.1 直接的线性摄动分析方法

直接的线性摄动分析方法是用于计算谐波激励下系统动态响应的一种有限元数值方法[10]. 这种方法无需预先求解自振频率即可直接求得响应,其相位信息通过解的实虚部表达. 为推导方便,我们仅以质量比例阻尼作为阻尼项,则有限元能量弱形式如下:

$$\int_V \rho \delta \boldsymbol{u} \cdot \ddot{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}V + \int_V \rho \alpha_c \delta \boldsymbol{u} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} \mathrm{d}V + \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \mathrm{d}V - \int_{S_t} \delta \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{t} \mathrm{d}S = 0, \tag{1}$$

其中, $\dot{\boldsymbol{u}}$ 和 $\ddot{\boldsymbol{u}}$ 分别表示速度和加速度响应. 式中各变量在该算法中均以复数表达. ρ 表示密度, α_c 表示质量阻尼系数, $\boldsymbol{\sigma}$ 表示应力, $\boldsymbol{t}$ 表示外力. 由上式可获得如下离散形式:

$$\delta \boldsymbol{u}^N \{ \boldsymbol{M}^{NM} \ddot{\boldsymbol{u}}^M + \boldsymbol{C}^{NM}_{(\mathrm{m})} \dot{\boldsymbol{u}}^M + \boldsymbol{I}^N - \boldsymbol{P}^N \} = \boldsymbol{0}, \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{M}^{NM}$ 表示质量矩阵, $\boldsymbol{C}^{NM}$ 表示质量比例阻尼矩阵, $\boldsymbol{I}^N$ 及 $\boldsymbol{P}^N$ 分布表示节点内外力. 为了区分不同频率和相位的谐波激励影响,将传统控制方程中的位移和受力扩展为如下复数形式:

$$\Delta \boldsymbol{u}^M = (\mathrm{Re}\, \boldsymbol{u}^M + \mathrm{Im}\, \boldsymbol{u}^M \mathrm{i}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \tag{3}$$

$$\Delta \boldsymbol{P}^N = (\mathrm{Re}\, \boldsymbol{P}^N + \mathrm{Im}\, \boldsymbol{P}^N \mathrm{i}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\Omega t}, \tag{4}$$

式中,Re 表示实部,Im 表示虚部, Ω 表示激励频率. 将式(3)和(4)代入式(2),得到计算方程的矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Re}\, \boldsymbol{A}^{NM} & \mathrm{Im}\, \boldsymbol{A}^{NM} \\ \mathrm{Im}\, \boldsymbol{A}^{NM} & -\mathrm{Re}\, \boldsymbol{A}^{NM} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}\, \boldsymbol{u}^M \\ \mathrm{Im}\, \boldsymbol{u}^M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}\, \boldsymbol{P}^N \\ -\mathrm{Im}\, \boldsymbol{P}^N \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

上式中

$$\mathrm{Re}\, \boldsymbol{A}^{NM} = \boldsymbol{K}^{NM} - \Omega^2 \boldsymbol{M}^{NM}, \tag{6}$$

$$\mathrm{Im}\, \boldsymbol{A}^{NM} = -\Omega (\boldsymbol{C}^{NM}_{(\mathrm{m})} + \boldsymbol{C}^{NM}_{(\mathrm{k})}) - \boldsymbol{C}^{NM}_{(\mathrm{s})}, \tag{7}$$

$\boldsymbol{K}^{NM}$ 和 $\boldsymbol{M}^{NM}$ 分别表示结构的刚度矩阵和质量矩阵, $\boldsymbol{C}_{(\mathrm{m})}$, $\boldsymbol{C}_{(\mathrm{k})}$ 和 $\boldsymbol{C}_{(\mathrm{s})}$ 分别表示质量比例阻尼、刚度比例阻尼和结构阻尼. 这样,通过式(5)就构造了数值解法需要的离散方程组. 只要阻尼项存在,位移和受力就存在虚部,而不同种类的阻尼项仅改变 $\mathrm{Im}\, \boldsymbol{A}^{NM}$ 的具体表达,不影响计算形式. 因此,下文中仅考虑质量比例阻尼为例进行计算.

1.2 面向目标的误差估计

虽然基于全局能量的误差估计方法对于整体误差有较好的估计,对于某个单独的关键变量精度却无能为力. 即使全局的能量误差参数得到很好的控制,也并不能表明某个局域的关键变量同样有很好的精度. 面向目标误差估计方法即为了解决某些存在特殊关键变量问题的有限元计算精度估计方法.

这里,我们先介绍一下面向目标误差估计的理论框架[3].

$$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{v} : \boldsymbol{D}\, \nabla \boldsymbol{u} \mathrm{d}\Omega, \tag{8}$$

$$F(\boldsymbol{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}s, \tag{9}$$

$$Q = f(\boldsymbol{u}), \tag{10}$$

其中, B 表示内能,以线弹性为例,$\boldsymbol{D}$ 表示弹性刚度矩阵,则内能可表达为如式(8)的形式. F 表示外力功,Q 为关心的设计量即目标函数. 此目标函数 Q 可以是位移场 $\boldsymbol{u}$ 的任意函数,则能量平衡可记作

$$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = F(\boldsymbol{v}). \tag{11}$$

进行面向目标误差估计分析的关键在于构造偶问题. 原问题实际上就是一个在平衡方程约束下关于 Q 的控制问题,这样的带约束控制问题可以转化为 Lagrange 函数的极值问题求解. 求解 Lagrange 函数的极值是由求导完成的,这样,偶问题就可以描述为

$$\dot{B}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}) = \dot{Q}(\boldsymbol{u};\boldsymbol{v}), \tag{12}$$

其中, $\boldsymbol{p}$ 为关于 Q 的影响函数,即 Lagrange 算子. $\dot{B}$ 为内能关于位移场的导数,$\dot{Q}$ 为目标函数关于位移场的导数. 偶问题即内能与目标函数间的导数关系. 目标函数 Q 的误差可以通过原问题及偶问题的解和残差表示. $\boldsymbol{u}_0$ 和 $\boldsymbol{p}_0$ 分别表示原问题和偶问题的有限元数值解,则各误差和残差的形式如下:

$$\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_0, \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0, \tag{14}$$

$$R(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{q}) = F(\boldsymbol{q}) - B(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{q}), \tag{15}$$

$$\bar{R}(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_0) = \dot{Q}(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{v}) - \dot{B}(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{v},\boldsymbol{p}_0). \tag{16}$$

则关键的设计量误差可由以上各残差表达,其表达式可通过 Taylor 展开近似化简为

$$Q(\boldsymbol{u}) - Q(\boldsymbol{u}_0) \approx R(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{p}_0) + R(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{\varepsilon}_0), \tag{17}$$

这样,第 1 项可以直接计算获得,作为仿真误差的估计,而第 2 项可以通过下式计算误差估计的范围:

$$R(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_0) = B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varepsilon}_0) - B(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_0) \approx B(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_0), \tag{18}$$

$$B(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_0) = B(s\boldsymbol{e}_0, s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0) = \| s\boldsymbol{e}_0 + s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \|^2/4 - \| s\boldsymbol{e}_0 - s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \|^2/4. \tag{19}$$

由于 $\| s\boldsymbol{e}_0 \pm s^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \|^2$ 存在极大极小值,因此,$B(\boldsymbol{e}_0,\boldsymbol{\varepsilon}_0)$ 的范围可以估计,则式(17)即可用于计算目标函数的误差范围.

1.3 有限元面向目标误差估计在频域计算方面的扩展

对于线弹性有限元问题, B 和 Q 分别为关于 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{p}$ 的线性函数,其导数表达可以化简,原问题和它的偶问题可以进行解偶:

$$B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{q}) = F(\boldsymbol{q}), \tag{20}$$

$$B(\boldsymbol{p},\boldsymbol{v}) = Q(\boldsymbol{v}), \tag{21}$$

这样可以通过以上两式分别计算 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{p}$. 在有限元计算中,能量方程被离散到单元中计算. 则在原问题和偶问题中分别离散式(20)和(21),利用有限元近似分别求解 $\boldsymbol{u}_0$ 和 $\boldsymbol{p}_0$. 另一方面,目标函数的残差表达形式也会由于这种线性关系而一定程度的简化. 这样,目标函数的误差即可由各已知量表达为

$$Q(\boldsymbol{u}) - Q(\boldsymbol{u}_0) \approx R(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{p}_0) + R(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{\varepsilon}_0) = R(\boldsymbol{u}_0;\boldsymbol{p}). \tag{22}$$

在有限元计算精度能得到一定保证的情况下，$\boldsymbol{p}$ 与 $\boldsymbol{p}_0$ 的误差在允许范围内，则可将 $\boldsymbol{p}$ 代换为 $\boldsymbol{p}_0$，进行初步的误差估计. 初步的线性面向目标误差估计分为 3 个步骤：首先通过对于原问题的第一次有限元计算，获得仿真的位移场结果 $\boldsymbol{u}_0$；第 2 步，将关心的设计量写成积分形式，然后代入偶问题的弱形式，计算 $\boldsymbol{p}_0$，最后，利用两次计算分别得到的 $\boldsymbol{u}_0$ 和 $\boldsymbol{p}_0$ 求解 R 的分布，从而近似地获得关心的设计量的误差大小和单元间分布情况.

针对频域计算中虚数部分的自由度扩展，需要将能量形式 B，F 以及残差改写为扩展能量形式，建立扩展形式下的能量关系. 对于偶问题的能量形式，也需要进行相应的扩展. 扩展后的内能和外力功表达形式如下：

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = & \int_V \rho \boldsymbol{v}\cdot\ddot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}V + \int_V \rho\alpha_{\mathrm{c}}\,\boldsymbol{v}\cdot\dot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}V + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{v}):\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{u})\mathrm{d}V = \\ & \int_V \rho \mathrm{Re}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Re}\,\ddot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}V - \int_V \rho \mathrm{Im}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Im}\,\ddot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}V + \\ & \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{v}):\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{Re}\,\boldsymbol{u})\mathrm{d}V + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{v}):\boldsymbol{\sigma}(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{u})\mathrm{d}V + \\ & \int_V \rho\alpha_{\mathrm{c}}\mathrm{Re}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Im}\,\dot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}V + \int_V \rho\alpha_{\mathrm{c}}\mathrm{Im}\,\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{Re}\,\dot{\boldsymbol{u}}\mathrm{d}V, \end{aligned} \tag{23}$$

$$F(\boldsymbol{v}) = \int_\Omega \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}\,\boldsymbol{f} \\ -\mathrm{Im}\,\boldsymbol{f} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}\,\boldsymbol{v} \\ \mathrm{Im}\,\boldsymbol{v} \end{Bmatrix} \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_N} \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}\,\boldsymbol{g} \\ -\mathrm{Im}\,\boldsymbol{g} \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}\,\boldsymbol{v} \\ \mathrm{Im}\,\boldsymbol{v} \end{Bmatrix} \mathrm{d}s, \tag{24}$$

其中，Im 是频域计算方法中各量的虚部. 一系列新的自由度被加入能量方程的计算中，用以表达频域计算中各个量的虚部. 这样，将式(23)和(24)中的能量形式代入能量平衡方程(11)，得到包含虚部的离散方程为

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = & \sum \left(\begin{Bmatrix} \mathrm{Re}(P(\boldsymbol{v})^N) \\ -\mathrm{Im}(P(\boldsymbol{v})^N) \end{Bmatrix}^{\mathrm{T}} \cdot \begin{Bmatrix} \mathrm{Re}\,\boldsymbol{u}^M \\ \mathrm{Im}\,\boldsymbol{u}^M \end{Bmatrix} \right) = \\ & \sum \left((\mathrm{Re}\,\boldsymbol{v}^N)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Re}\,\boldsymbol{A}^{NM} \cdot \mathrm{Re}\,\boldsymbol{u}^M + (\mathrm{Im}\,\boldsymbol{v}^N)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}^{NM} \cdot \mathrm{Re}\,\boldsymbol{u}^M + \right. \\ & \left. (\mathrm{Re}\,\boldsymbol{v}^N)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}^{NM} \cdot \mathrm{Im}\,\boldsymbol{u}^M - (\mathrm{Im}\,\boldsymbol{v}^N)^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{Re}\,\boldsymbol{A}^{NM} \cdot \mathrm{Im}\,\boldsymbol{u}^M \right). \end{aligned} \tag{25}$$

通过能量形式 B 计算残差 R 的过程需要位移场解 $\boldsymbol{u}_0$ 和影响函数场解 $\boldsymbol{p}_0$. 由面向目标误差估计计算方法，将式(25)中的复数表达内能和外力功形式代入误差估计计算中，即可计算频域有限元解的误差和误差范围.

2 数值算例

本节通过一系列悬臂梁的频域数值计算对上节的扩展面向目标误差估计方法进行验证. 我们采用的对比方法主要是分别计算频域数值分析实际产生的误差和扩展面向目标误差估计法算得的误差，从而进行比较. 为了计算有限元计算实际产生的误差，我们采用考虑了剪切和扭转的 Timoshenko 梁振动理论解为基准，与无需理论解的面向目标误差估计计算结果比较.

2.1 悬臂梁的自振

误差估计算例如图 1 所示，为一根悬臂梁，其截面为正方形，尺寸为 4 m×4 m，梁长度为 40 m. 材料参数如下：弹性模量 E = 210 GPa，Poisson 比 ν = 0.3. 在梁的自由端受一个向下的谐振激励，大小为 1 N，激振频域为 1 ~ 10 Hz，关心的设计量假定是悬臂梁上表面中点的挠度响应实部.

由考虑剪切和扭转的 Timoshenko 梁理论[11-12]，计算得出该悬臂梁一阶频率为 2.07 Hz. 因此，我们将扫频计算范围选为 1 ~ 10 Hz，这样可以包含一阶频率，获得较大的响应结果.

如图2所示,模型由640个三维实体单元组成. C3D8R和C3D20R两种单元可以被用于计算对比中. 在梁弯曲问题中,C3D8R单元为线性,不能表达实际梁的二次变形形式,因此计算结果误差很大. 相对地,二次单元可以很好的表达梁的真实变形场,从而获得较好的仿真结果. 为了验证扩展的面向目标误差估计方法,我们选用线性单元组成的模型作为算例,这样保证了较明显的误差值,以避免小量误差. 同时,我们也对于 $\boldsymbol{u}_0$ 和 $\boldsymbol{p}_0$ 精度不同的情况进行了误差估计,以确定在这些情况下面向目标误差估计计算的精度变化.

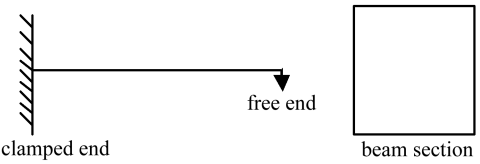

图1 频域直接动态分析方法误差分布检验算例

Fig. 1 The error estimation example of direct-solution steady-state dynamic analysis

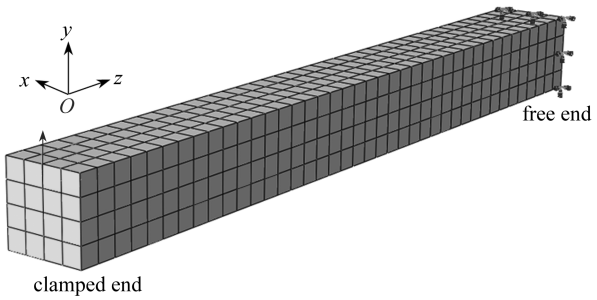

图2 悬臂梁模型实体网格划分

Fig. 2 3D mesh of cantilever beam

注 图2中,悬臂梁右端固支,长宽比为1∶10,符合细长梁假设,单元划分设置为4×4×40.

固有频率的计算采取如下不同形式:首先是利用Timoshenko梁振动理论计算理论值;另外通过数值模拟的方法,利用线性单元和二次单元分别获得有限元解. 不同方法、不同种类单元模型计算的各阶固有频率结果如表1:

表1 悬臂梁固有频率

Table 1 Natural frequency calculation results

mode N	linear element f/Hz	quadratic element f/Hz	theoretical f/Hz	R_L/%	R_Q/%
1	2.002 5	2.089 9	2.067 6	96.85	101.08
2	12.147	12.543	12.472	97.39	100.57
3	32.045	33.004	32.963	97.21	100.12
4	58.342	59.985	59.760	97.63	100.38
5	89.016	91.394	91.932	96.83	99.41

注 表1中,R_L 表示线性单元解与理论解的比,R_Q 表示二次单元与理论解的比.

由表1可知,对于算例中的悬臂梁响应问题,载荷较小,系统基本保持线性,因此,频域的直接动态分析有限元算法能较好的模拟梁的响应. 而对于二次单元,梁纯弯的变形形式可以由形函数精确表达. 因此,与理论解相比,结果非常近似. 两种仿真方法的结果相差大约3%. 在1~10 Hz的激励区间内存在一阶固有频率. 因此,在2 Hz附近的系统响应值将较高,更易于检验计算精度,估计计算误差. 为排除有限元计算本身的小量干扰,在以下的计算分析中,将针对误差相对较大的一次单元计算结果进行误差估计分析.

2.2 无阻尼情况下的误差估计

对于直接的频域摄动分析计算,如果忽略阻尼项,各量的虚部均为0.因此,在无阻尼情况下,扩展的面向目标误差估计方法与原始方法完全相同.图3中给出了无阻尼情况下原问题和偶问题的有限元解位移场,基于这两个问题的结果,可以进行面向目标误差估计分析.

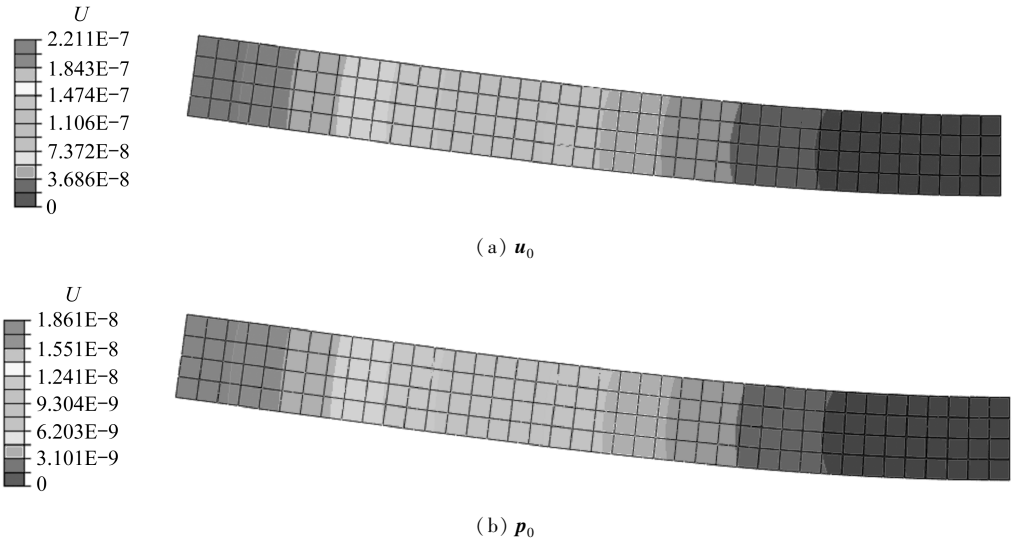

图3 2 Hz激励下的 $\boldsymbol{u}_0$ 和 $\boldsymbol{p}_0$ 场

Fig. 3 $\boldsymbol{u}_0$ and $\boldsymbol{p}_0$ in the frequency 2 Hz

无阻尼情况下频域扫描分析的误差估计结果如表2.误差估计计算结果与真实误差比较接近,验证了扩展的面向目标误差估计算法实部的精度.在一阶频率附近,一次单元和二次单元获得的目标值结果相差很大,这主要是由一次单元无法精确重构位移场产生的误差造成的.但无论误差的量级是大是小,扩展的面向目标误差估计计算都能估算出与真实误差差别不超过10%左右的结果.

表2 无阻尼情况频域扫描分析响应误差估计

Table 2 Error estimation result of direct-solution steady-state dynamic analysis without damping

f/Hz	$\boldsymbol{u}_1$/m	$\boldsymbol{u}_2$/m	e_0/m	e_1/m	e_2/m	R_1/%	R_2/%
1	2.13E-09	1.96E-09	-1.75E-10	2.79E-13	1.82E-10	-104.07	4.07
2	7.51E-08	1.86E-08	-5.65E-08	1.72E-09	5.94E-08	-105.12	5.12
3	-1.50E-09	-1.58E-09	-8.01E-11	1.62E-12	7.84E-11	-97.90	-2.10
4	-6.78E-10	-6.86E-10	-8.19E-12	7.46E-14	7.66E-12	-93.45	-6.55
5	-4.37E-10	-4.34E-10	2.51E-12	1.25E-13	2.46E-12	98.01	-1.99
6	-3.35E-10	-3.28E-10	6.77E-12	5.87E-14	8.07E-12	119.19	19.19
7	-2.88E-10	-2.78E-10	1.04E-11	3.19E-13	1.11E-11	107.57	7.57
8	-2.75E-10	-2.60E-10	1.53E-11	6.04E-14	1.70E-11	111.19	11.19
9	-2.91E-10	-2.67E-10	2.45E-11	1.67E-13	2.68E-11	109.50	9.50
10	-3.56E-10	-3.09E-10	4.69E-11	4.64E-13	5.25E-11	112.04	12.04

注 表2中,$\boldsymbol{u}_1$ 表示关键设计量在线性单元有限元计算中的解,$\boldsymbol{u}_2$ 表示该量在二次单元模型计算中的解,e_0 表示有限元解与理论解相比的误差,e_1 表示采用线性单元计算影响因子场 $\boldsymbol{p}_0$ 时得到的面向目标误差估计结果,e_2 表示采用二次单元计算影响因子场 $\boldsymbol{p}_0$ 时得到的面向目标误差估计结果,R_1 表示 e_2 与 e_0 间的比,R_2 表示无量纲化的 e_2 与 e_0 之差.

由表 2 可见,在无阻尼情况下的频域计算,仅对应实部的结果.因此,与线性有限元的面向目标误差估计没有本质的区别,误差分析计算能较好的估计出计算误差,与相对理论解得到的误差基本相符,验证了本算法的实部基本计算.在下节的分析中,我们将验证包含虚部计算时该方法的精度.

2.3 5%质量比例阻尼算例

对于一般的工程计算,5% 的质量比例阻尼经常被近似地采用.因此,验证在该阻尼设置下的频域直接动态分析计算精度有重要的实际意义.在阻尼项存在的情况下,各量的虚部不再为 0.这样,内能和外力功就包含了实部能量、虚部能量和交叉能量,其中后两项是无阻尼情况下所没有的.在这种情况下的计算结果如表 3.

表 3 5% 质量阻尼情况频域扫描分析响应误差估计

Table 3 Error estimation result of direct-solution steady-state dynamic analysis with 5% mass proportional damping

f/Hz	$\boldsymbol{u}_1$ /m	$\boldsymbol{u}_2$ /m	e_0 /m	e_1 /m	e_2 /m	R_1 /%	R_2 /%
1	2.13E-09	1.96E-09	-1.753 4E-10	3.23E-13	9.13E-11	104.10	4.10
2	7.29E-08	1.85E-08	-5.436 9E-08	3.48E-09	2.62E-08	96.35	-3.65
3	-1.50E-09	-1.58E-09	-8.012 0E-11	1.72E-12	3.92E-11	97.77	-2.23
4	-6.78E-10	-6.86E-10	-8.193 0E-12	6.23E-14	3.82E-12	93.29	-6.71
5	-4.37E-10	-4.34E-10	2.508 0E-12	1.21E-13	-1.23E-12	98.12	-1.88
6	-3.35E-10	-3.28E-10	6.772 0E-12	-6.02E-14	-4.04E-12	119.21	19.21
7	-2.88E-10	-2.78E-10	1.035 9E-11	3.19E-13	-5.57E-12	107.58	7.58
8	-2.75E-10	-2.60E-10	1.532 3E-11	5.97E-14	-8.52E-12	111.20	11.20
9	-2.91E-10	-2.67E-10	2.451 4E-11	1.66E-13	-1.34E-11	109.50	9.50
10	-3.56E-10	-3.09E-10	4.686 9E-11	-4.67E-13	-2.63E-11	112.05	12.05

注 表 3 中,$\boldsymbol{u}_1$ 表示关键设计量在线性单元有限元计算中的解,$\boldsymbol{u}_2$ 表示该量在二次单元模型计算中的解,e_0 表示有限元解与理论解相比的误差,e_1 表示采用线性单元计算影响因子场 $\boldsymbol{p}_0$ 时得到的面向目标误差估计结果,e_2 表示采用二次单元计算影响因子场 $\boldsymbol{p}_0$ 时得到的面向目标误差估计结果,R_1 表示 e_2 与 e_0 间的比,R_2 表示无量纲化的 e_2 与 e_0 之差.

由表 3 可见,在 5% 质量阻尼的情况下,仿真结果和误差估计结果均与 2.2 节相似,面向目标误差估计方法同样获得了较好的结果.但 5% 质量阻尼产生的位移场结果差别本身就很小,以频率在 2 Hz 情况下的结果为例,梁中点挠度实部结果由无阻尼时的 7.51E-8 m 降到 7.29E-8 m.在 5% 质量阻尼这种工程中常使用的条件下,面向目标误差估计方法给出了良好的误差分析结果.

目标函数残差在模型上的分布如图 4.在自由端,沿悬臂梁厚度方向的残差分布比较均匀.而在固支端,残差数值上比梁中间更大,而且在固支端的上下表面存在误差的集中.这主要是由于应力的分布情况不同.在自由端,起主导作用的是剪力而非弯矩,因此应力分布比较均匀,各单元情况相近,残差分布也就比较均匀.而在固支端,弯矩起主要作用,而弯矩作用下的正应力为沿厚度线性分布,因此在上下端部应力更大,单元内能更大.同时,固支端上下端面由于是强约束的边缘,本身就存在应力集中,因此在这些单元中的误差分布也就更大.

表 4 和图 5 中,介绍了扩展面向目标误差估计算法得到的算例目标量误差上下限等结果.误差估计计算结果与理论解得到的结果非常接近,误差范围也得到了较好的控制,一般范围不大于误差本身的 10 倍,并且不大于目标函数值的 20%.

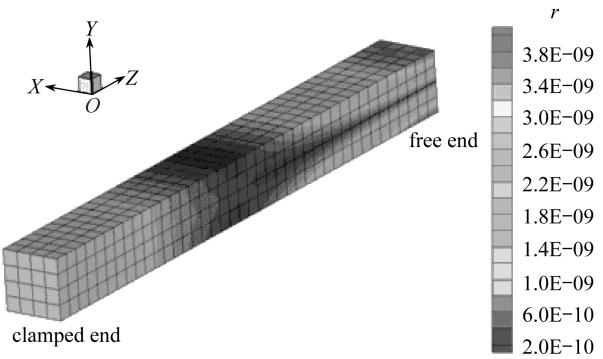

图 4 目标量残差 r 的分布

Fig. 4 The distribution of residual to the quantity of interest

表 4 5% 质量阻尼情况误差范围估计

Table 4 Result of error bound estimation with 5% mass proportional damping

f/Hz	e_0 /m	e_1 /m	b /m	R_1 /%	R_2 /%
1	−1.750E−10	1.82E−10	3.52E−10	193.24	16.52
2	−5.440E−08	5.10E−08	6.81E−08	133.50	93.41
3	−8.010E−11	7.91E−11	1.76E−10	222.31	11.76
4	−8.190E−12	7.73E−12	7.99E−11	1 034.34	11.80
5	2.508E−12	−3.24E−12	5.26E−11	1 625.24	12.04
6	6.772E−12	−8.06E−12	8.31E−11	1 030.62	24.83
7	1.036E−11	−1.11E−11	2.07E−11	185.74	7.17
8	1.532E−11	−1.70E−11	1.66E−11	97.64	6.05
9	2.451E−11	−2.68E−11	6.38E−11	237.64	21.88
10	4.687E−11	−5.25E−11	8.79E−11	167.43	24.71

注 表4 中，e_0 表示有限元解与理论解相比的误差，e_1 表示采用线性单元计算影响因子场 $\boldsymbol{p}_0$ 时得到的面向目标误差估计结果，b 表示误差估计计算得到的误差范围大小，R_1 表示误差范围与理论解的比，R_2 表示误差范围与目标函数数值解的比.

表 5 不同质量比例阻尼算例中目标函数数值实虚部的比

Table 5 Comparison between real and imaginary part of quantity of interest with 50% mass proportional damping

f/Hz	error 1			error 2		
	Re e_1 /m	Im e_1 /m	R_1 /%	Re e_2 /m	Im e_2 /m	R_2 /%
1	1.96E−09	−4.82E−12	0.25	1.96E−09	−4.82E−11	2.46
2	1.85E−08	−8.03E−10	4.34	1.56E−08	−6.78E−09	43.39
3	−1.58E−09	−7.64E−12	0.49	−1.57E−09	−7.62E−11	4.85
4	−6.86E−10	−1.60E−12	0.23	−6.85E−10	−1.60E−11	2.33
5	−4.34E−10	−6.12E−13	0.14	−4.34E−10	−6.12E−12	1.41
6	−3.28E−10	−2.84E−13	0.09	−3.28E−10	−2.84E−12	0.87
7	−2.78E−10	−1.27E−13	0.05	−2.78E−10	−1.27E−12	0.46
8	−2.60E−10	−2.27E−14	0.01	−2.60E−10	−2.27E−13	0.09
9	−2.67E−10	8.51E−14	0.03	−2.67E−10	8.51E−13	0.32
10	−3.09E−10	2.73E−13	0.09	−3.09E−10	2.73E−12	0.88

注 表5 中，Re 表示目标函数误差结果的实部，Im 表示结果的虚部，R_1 表示5% 质量阻尼情况下目标函数误差结果虚部与实部之比，R_2 表示 50% 质量阻尼情况下目标函数误差结果虚部与实部之比.

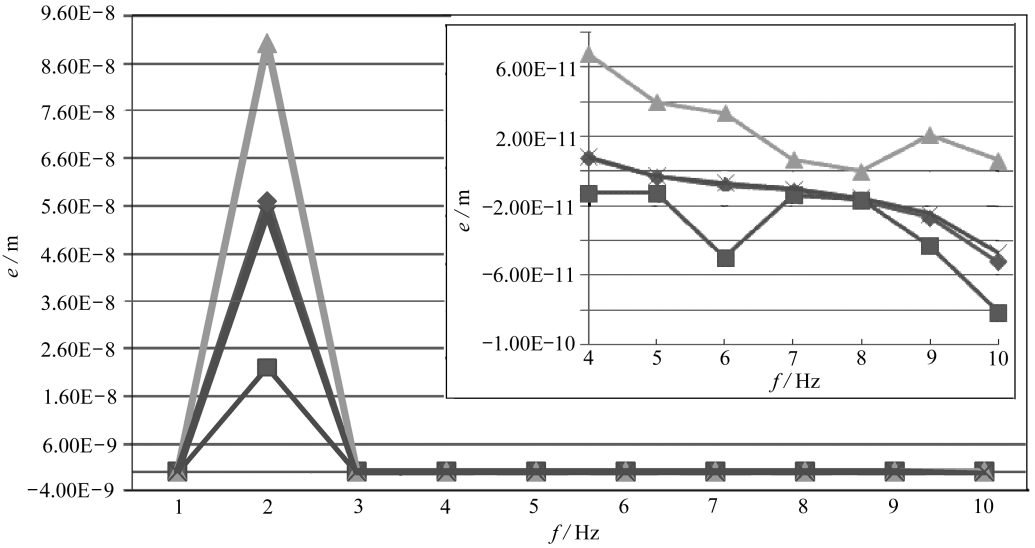

图 5 5% 质量阻尼情况下的误差及误差范围

Fig. 5 Error and its bound estimated in the case of 5% mass proportional damping

注 图 5 中,带三角点的线表示面向目标误差估计方法算得的误差上限,带方形点的线表示误差下限,带菱形点的线表示面向目标误差估计方法算得的误差值,带×点的线表示理论误差解,右上部分的小图是大图 4 Hz 至 10 Hz 部分的放大图.

2.4 50% 质量比例阻尼算例

虽然扩展的频域面向目标误差估计方法在 5% 质量比例阻尼算例中有很好的表现,但扩展部分的计算精度并未得到有效的验证.5% 质量比例阻尼算例在不同频率下目标函数的实虚部之比列在表 5 中.可见在这个算例中,虚部能量远小于实部能量,对于结果没有产生显著的影响.为了检验扩展部分的计算精度,我们虚构了一个 50% 质量比例阻尼的算例.这样,虚部能量和交叉能量与实部能量可比.通过这个算例,就可以有效地检验扩展部分的计算精度.

表 6 50% 质量阻尼情况频域扫描分析响应误差估计

Table 6 Error estimation result of direct-solution steady-state dynamic analysis with 50% mass proportional damping

f/Hz	$\boldsymbol{u}_1$ /m	$\boldsymbol{u}_2$ /m	e_0 /m	e_1 /m	e_2 /m	R_1 /%	R_2 /%
1	2.13E-09	1.96E-09	-1.75E-10	2.02E-12	1.84E-10	104.91	4.91
2	1.85E-08	1.56E-08	-2.91E-09	-4.81E-10	3.02E-09	103.75	3.75
3	-1.49E-09	-1.57E-09	-7.95E-11	3.45E-12	8.45E-11	106.28	6.28
4	-6.77E-10	-6.85E-10	-8.16E-12	7.37E-13	8.21E-12	100.61	0.61
5	-4.37E-10	-4.34E-10	2.51E-12	1.29E-13	-3.38E-12	134.64	34.64
6	-3.35E-10	-3.28E-10	6.77E-12	-1.68E-13	-8.12E-12	119.94	19.94
7	-2.88E-10	-2.78E-10	1.04E-11	6.11E-13	-1.12E-11	107.84	7.84
8	-2.75E-10	-2.60E-10	1.53E-11	9.85E-14	-1.71E-11	111.34	11.34
9	-2.91E-10	-2.67E-10	2.45E-11	3.03E-13	-2.69E-11	109.62	9.62
10	-3.56E-10	-3.09E-10	4.68E-11	-1.01E-12	-5.26E-11	112.23	12.23

注 表 6 中,$\boldsymbol{u}_1$ 表示关键设计量在线性单元有限元计算中的解,$\boldsymbol{u}_2$ 表示该量在二次单元模型计算中的解,e_0 表示有限元解与理论解相比的误差,e_1 表示采用线性单元计算影响因子场 $\boldsymbol{p}_0$ 时得到的面向目标误差估

计结果，e_2 表示采用二次单元计算影响因子场 $\boldsymbol{p}_0$ 时得到的面向目标误差估计结果，R_1 表示 e_2 与 e_0 间的比，R_2 表示无量纲化的 e_2 与 e_0 之差.

扩展的面向目标误差估计计算结果列在表 6 中. 以 2 Hz 激励下目标函数值为例，50% 质量比例阻尼算例解为 7.29E-8 m，50% 质量比例阻尼算例解为 1.85E-08 m . 可见虚部的计算已经给整个计算产生了重大影响. 而扩展的面向目标误差估计方法在这种算例中同样取得了很好的结果.

50% 质量比例阻尼算例的误差分布如图 6，其分布形式与 5% 质量比例阻尼误差分布形式相似. 这主要是由于质量比例阻尼的影响对于整个模型而言相对均匀.

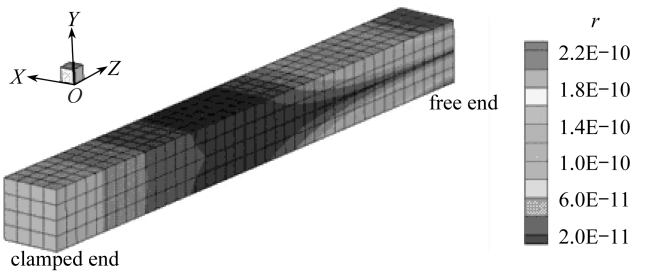

图 6 目标量残差 r 的分布

Fig. 6 The distribution of residual to the quantity of interest

表 7 50% 质量阻尼情况误差范围估计

Table 7 Result of error bound estimation with 50% mass proportional damping 50%

f/Hz	e_0 /m	e_1 /m	b /m	R_1 /%	R_2 /%
1	-1.75E-10	9.18E-11	3.20E-10	174.25	16.36
2	-2.91E-09	1.51E-09	3.17E-09	105.11	20.29
3	-7.95E-11	4.22E-11	1.77E-10	209.51	11.26
4	-8.16E-12	4.11E-12	8.02E-11	977.07	11.71
5	2.51E-12	-1.69E-12	5.27E-11	1 558.22	12.13
6	6.77E-12	-4.06E-12	8.29E-11	1 020.94	25.30
7	1.04E-11	-5.59E-12	1.93E-11	172.69	6.94
8	1.53E-11	-8.53E-12	2.11E-11	123.95	8.14
9	2.45E-11	-1.34E-11	6.36E-11	236.92	23.85
10	4.68E-11	-2.63E-11	8.74E-11	166.33	28.31

注 表 7 中，e_0 表示有限元解与理论解相比的误差，e_1 表示采用线性单元计算影响因子场 $\boldsymbol{p}_0$ 时得到的面向目标误差估计结果，b 表示误差估计计算得到的误差范围大小，R_1 表示误差范围与理论解的比，R_2 表示误差范围与目标函数数值解的比.

与 5% 质量比例阻尼算例结果相似，扩展的面向目标误差估计方法很好地计算了目标量的误差上下限. 估算的误差范围仅相当于误差本身的两倍左右，且不超过目标量本身的 20%. 可见在虚部能量存在重要影响的情况下，扩展的面向目标误差估计算法能得到很好的结果.

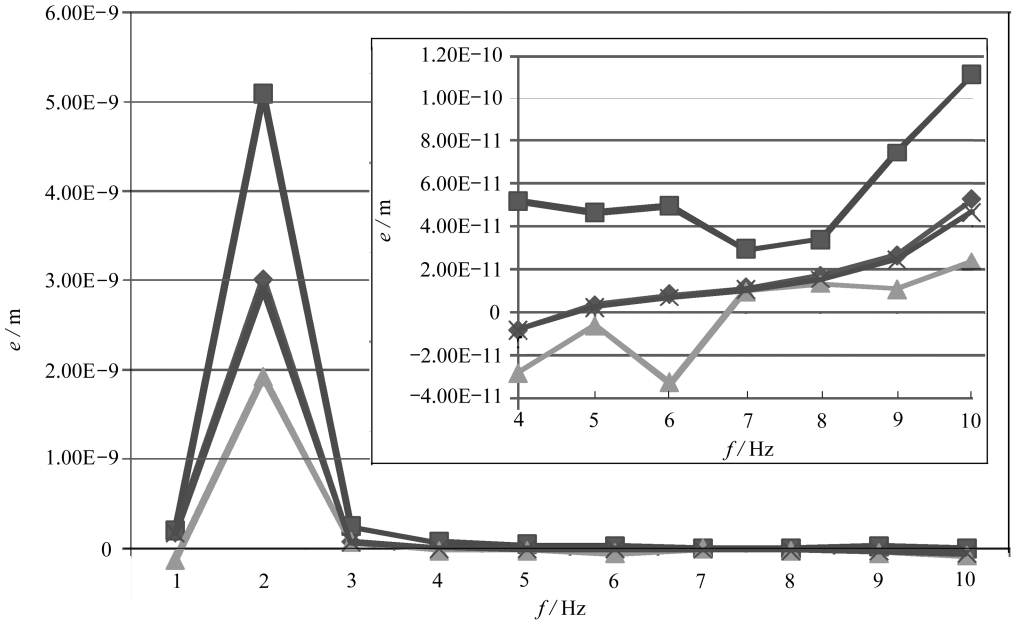

图 7 50% 质量阻尼情况下的误差及误差范围

Fig. 7 Error and its bound estimated in the case of 50% mass proportional damping

注 图 7 中,带三角点的线表示面向目标误差估计方法算得的误差上限,带方形点的线表示误差下限,带菱形点的线表示面向目标误差估计方法算得的误差值,带×点的线表示理论误差解. 右上部分的小图是大图 4 Hz 至 10 Hz 部分的放大图.

3 结 论

本文通过扩展面向目标误差估计方法的自由度,表达了频域计算中各量的虚部,从而描述了虚部能量和交叉能量在频域分析中的影响,建立了一种在频域有限元分析中计算目标值精度的新方法. 这种方法能有效地估算出直接的线性摄动分析方法对于某个目标函数结果的误差范围. 本文通过一系列算例验证了这种误差估算方法的精度. 在这些算例中,离散误差本身的解以及误差范围都与理论解相符合.

本方法存在广泛的进一步发展与应用空间:通过这种方法,对于依托有限元计算增加自由度的各种数值算法,如扩展有限元,均可能获得很好的目标量误差估计. 而面向目标误差估计方法本身更不仅局限于有限元,而可应用于各种数值分析方法中. 非线性问题将改变估计计算中能量积分的形式,对于偶问题的解耦计算带来困难,如何实现针对此类问题的非解耦面向目标误差估计计算仍有待于进一步的研究.

参考文献(References):

[1] Zhang R, Zhang C, Jiang J. A new approach to direct solution of 2D heat transfer problem with non-linear source-terms in frequency domain[J]. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 2006, **7**(3):295-298.

[2] Ainsworth M, Oden J T. A posteriori error estimation in finite element analysis[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1997, **142**(1/2):1-88.

[3] Oden J T, Prudhomme S. Estimation of modeling error in computational mechanics[J]. *Journal of Computational Physics*, 2002, **182**(2): 496-515.

[4] Ladeveze P, Rougeota Ph, Blanchardb P, Moreaub J P. Local error estimators for finite element linear analysis[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1999, **176**(1/4):231-246.

[5] Grätsch T, Bathe K J. A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis[J]. *Computers and Structures*, 2005, **83**(4/5):235-265.

[6] Schleupen A, Ramm E. Local and global error estimations in linear structural dynamics[J]. *Computers and Structures*, 2000, **76**(6):741-756.

[7] Larsson F, Hansbo P, Runesson K. Strategies for computing goal-oriented a posteriori error measures in non-linear elasticity[J]. *Int J Numer Meth Engng*, 2002, **55**(8):879-894.

[8] van der Zee K G, Verhoosel C V. Isogeometric analysis-based goal-oriented error estimation for free-boundary problems[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2011, **47**(6):600-609.

[9] van der Zee K G, Oden J T, Prudhomme S, Hawkins-Daarud A. Goal-oriented error estimation for Cahn-Hilliard models of binary phase transition[J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2011, **27**(1):160-196.

[10] Ni Y Q, Zheng G, Ko J M. Nonlinear periodically forced vibration of stay cables[J]. *Transactions of the ASME. Journal of Vibration and Acoustics*, 2004, **126**(2):245-252.

[11] Challamel N. On the comparison of Timoshenko and shear models in beam dynamics[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, *ASCE*, 2006,**132**(10): 1141- 1146.

[12] Han S M, Benaoya H, Wei T. Dynamics of transversely vibration beams using four engineering theories[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1999, **225**(5): 935- 988.

[13] Oden J T, Prudhomme S, Bauman P. On the extension of goal-oriented error estimation and hierarchical modeling to discrete lattice models[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2005, **194**(34/35):3668-3688.

[14] Fuentes D, Littlefield D, Oden J T, Prudhomme S. Extensions of goal-oriented error estimation methods to simulations of highly-nonlinear response of shock-loaded elastomer-reinforced structures[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2006, **195**(37/40): 4659-4680.

[15] Prudhomme S, Oden J T. On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 1999, **176**(1/4): 313-331.

[16] Oden J T, Prudhomme S. Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method[J]. *Computers and Mathematics With Applications*, 2001, **41**(5/6): 735-756.

[17] Rüter M, Stein E. Goal-oriented a posteriori error estimates in linear elastic fracture mechanics[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2006, **195**(4/6):251-278.

[18] Chamoina L, Ladevèze P. Strict and practical bounds through a non-intrusive and goal-oriented error estimation method for linear viscoelasticity problems[J]. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2009, **45**(4): 251-262.

[19] Fang F, Pain C C, Navon I M, Gorman G J, Piggott M D, Allison P A, Goddard A J H. A POD goal-oriented error measure for mesh optimization[J]. *Int J Numer Meth Fluids*, 2010, **63**(2):185-206.

[20] Pannachet T, Díez P, Askes H, Sluys L J. Error assessment and mesh adaptivity for regularized continuous failure models[J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2010, **199**(17/20): 961-978.

[21] Panetier J, Ladeveze P, Chamoin L. Strict and effective bounds in goal-oriented error estimation applied to fracture mechanics problems solved with XFEM[J]. *Int J Numer Meth Engng*, 2010, **81**(6):671-700.

[22] Pardo D. multigoal-oriented adaptivity for hp-finite element methods[J]. *Procedia Computer Science*, 2010, **1**(1):1953-1961.

Goal-Oriented Error Estimation Applied to Direct Solution of Steady-State Analysis With Frequency Domain Finite Element Method

LIN Zhi-jia, YOU Xiao-chuan, ZHUANG Zhuo

(*Applied Mechanics Laboratory*, *School of Aerospace*, *Tsinghua University*, *Beijing* 100084, *P. R. China*)

Abstract: Based on the concept of constitutive relation error along with residual of both origin and dual problems, a goal-oriented error estimation method with extended degrees of freedom was developed. It leads to the high quality local error bounds in the problem of direct-solution steady-state dynamic analysis with frequency domain finite element, which involves enrichments with plural variable basis functions. The solution of steady-state dynamic procedure calculated the harmonic response directly in terms of the physical degrees of freedom in the model, which used mass, damping, and stiffness matrices of the system. An enriched form of goal-oriented error estimation aiming at this frequency calculation was formed and implemented. A three dimensional finite element example was carried out to illustrate the computational procedures.

Key words: goal-oriented error estimation; finite element method; direct-solution steady-state analysis; frequency domain