文章编号:1000-0887(2012)08-1013-10

Langmuir 扰动方程和 Zakharov 方程: 光滑性与近似*

游淑军[1,2], 郭柏灵[3], 宁效琦[2]

(1. 中南大学 数学科学与计算技术学院, 长沙 410083;
2. 怀化学院 数学系, 湖南 怀化 418008;
3. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 考虑了一类带参数 H, 用于描述 Langmuir 扰动的方程. 研究了当参数 H 趋于 0 时, 这一类扰动方程的渐近行为. 通过建立一个弱收敛结果和一个强收敛结果, 得到了这类扰动方程初值问题的解 (E^H, n^H) 收敛到 Zakharov 方程初值问题的解 (E, n) 的结论.

关 键 词: Zakharov 方程; Langmuir 扰动方程; 近似

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A

DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2012.08.009

引 言

描述等离子体中 Langmuir 波传播的 Zakharov 方程, 1972 年被 Zakharov 导出[1]. R^{d+1} 维 Zakharov 方程的一般形式为

$$\mathrm{i}E_t + \Delta E = nE, \tag{1}$$

$$n_{tt} - \Delta n = \Delta |E|^2, \tag{2}$$

其中, $E: R^{1+d} \to C^d$ 表示高频电场的缓变振幅, $n: R^{1+d} \to \mathbf{R}$ 是离子密度的扰动量.

过去的 10 年里, 许多学者对 Zakharov 系统进行了研究[2-4]. 文献[5]中讨论了 Zakharov 方程的非线性 Schrödinger 极限. 利用量子流体方法, Garcia 等[6]得到了如下修正的 Zakharov 方程:

$$\mathrm{i}E_t + E_{xx} - H^2 E_{xxxx} = nE, \tag{3}$$

$$n_{tt} - n_{xx} + H^2 n_{xxxx} = |E|^2_{xx}, \tag{4}$$

其中, H 是反映等离子体与电子热能量比率的无量纲的量子参数.

在文中, 我们将方程(3)和方程(4)视为带参数 $H(0 < H < 1)$ 的 Langmuir 扰动方程. 研究当 $H \to 0$ 时, 方程(3)和方程(4)的渐近行为. 期望方程(3)和方程(4)"收敛"到 Zakharov 方程. 事实上, 我们的目的是去确定在什么意义下带初始条件(5)的方程(3)和方程(4)的解 (E^H, n^H) 收敛到带初始条件(5)的方程(1)和方程(2)的惟一解 (E, n).

---

* **收稿日期:** 2011-06-24; **修订日期:** 2012-03-30

基金项目: 湖南省教育厅科研基金资助项目(10C1056)

作者简介: 游淑军(1979—), 女, 湖南人, 讲师, 博士(联系人. E-mail: ysj980@yahoo.com.cn).

$$E|_{t=0}=E_0(x),\ n|_{t=0}=n_0(x),\ n_t|_{t=0}=n_1(x). \tag{5}$$

下面我们陈述本文的主要结论.

定理1 假设 E_0,n_0,n_1 分别属于 $H^2(\mathbf{R}),H^1(\mathbf{R}),H^{-1}(\mathbf{R})$. 则当 $H\to 0$ 时,$(E^H,n^H)\to(E,n)$ 在 $L^\infty(\mathbf{R}_+,H^2(\mathbf{R}))\times L^\infty(\mathbf{R}_+,H^1(\mathbf{R}))$ 内弱*收敛,其中(E,n)是带初始条件(5)的方程(3)和方程(4)的惟一解.

定理2 假设 $E_0(x)\in H^{m+5}(\mathbf{R}),n_0(x)\in H^{m+4}(\mathbf{R}),n_1(x)\in H^{m+3}(\mathbf{R}),m\geqslant 1$. 则

$$\|F^H\|_{H^{m+1}(\mathbf{R})}=\|E^H-E\|_{H^{m+1}(\mathbf{R})}\to 0\qquad (H\to 0),$$

$$\|u^H\|_{H^m(\mathbf{R})}=\|n^H-n\|_{H^m(\mathbf{R})}\to 0\qquad (H\to 0).$$

为了行文的方便,我们对文中出现的符号作如下约定. $L^q(R^d)$ $(1\leqslant q\leqslant\infty)$ 表示所有关于 R^d 为 q 次可积的函数组成的空间,用 $\|\cdot\|_{L^q(R^d)}$ 或 $\|\cdot\|_{L^q}$ 表示其上的范数. $\|\cdot\|_{H^{s,p}(R^d)}$ 表示空间 $H^{s,p}(R^d)$ 的范数. 如果 $p=2,H^{s,2}(R^d)=H^s(R^d)$. 我们用 C 表示不同的依赖于初始值的常数.

本文的结构是:在第1节中,我们建立弱收敛结果;在第2节中,我们得到强收敛的结论.

1 一个弱收敛结果

我们引入函数 φ 并将方程(3)至方程(5)变为如下形式:

$$\mathrm{i}E_t^H+E_{xx}^H-H^2E_{xxxx}^H-n^HE^H=0, \tag{6}$$

$$n_t^H-\varphi_{xx}^H=0, \tag{7}$$

$$\varphi_t^H-n^H+H^2n_{xx}^H-|E^H|^2=0, \tag{8}$$

带初始条件

$$E^H|_{t=0}=E_0(x),\ n^H|_{t=0}=n_0(x),\ \varphi^H|_{t=0}=\varphi_0(x). \tag{9}$$

将式(6)分别与 E^H 和 $-E_t^H$ 作内积,易得

$$\|E^H(\cdot,t)\|_{L^2(\mathbf{R})}^2=\|E_0\|_{L^2(\mathbf{R})}^2, \tag{10}$$

$$\|E_x^H\|_{L^2(\mathbf{R})}^2+H^2\|E_{xx}^H\|_{L^2(\mathbf{R})}^2+\int_{\mathbf{R}}n^H|E^H|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\|\varphi_x^H\|_{L^2(\mathbf{R})}^2+\frac{1}{2}\|n^H\|_{L^2(\mathbf{R})}^2+\frac{H^2}{2}\|n_x^H\|_{L^2(\mathbf{R})}^2=C. \tag{11}$$

如果 E_0,n_0,n_1 分别属于 $H^2(\mathbf{R}),H^1(\mathbf{R}),H^{-1}(\mathbf{R})$, 则根据 Gerlerkin 方法,可得如下弱整体解的存在性:

$$E^H\in L^\infty(\mathbf{R}_+,H^2(\mathbf{R})),\ n^H\in L^\infty(\mathbf{R}_+,H^1(\mathbf{R})).$$

在证明定理1之前,我们先引入两个引理[7].

引理1 设 B_0,B,B_1 是自反的 Banach 空间,嵌入 $B_0\to B$ 是紧的. 记

$$W=\left\{V\in L^{p_0}((0,T);B_0),\ \frac{\partial V}{\partial t}\in L^{p_1}((0,T);B_1)\right\},\qquad T<\infty,\ 1<p_0,\ p_1<\infty.$$

且装备如下的范数:

$$\|V\|_W=\|V\|_{L^{p_0}((0,T);B_0)}+\|V_t\|_{L^{p_1}((0,T);B_1)}.$$

则嵌入 $W\to L^{p_0}((0,T);B)$ 是紧的.

引理2 设 Ω 为 R^n 的开子集,$g,g_\varepsilon\in L^p(R^n),1<p<\infty$, 使得

$$g_\varepsilon\to g \text{ 几乎处处在 } \Omega \text{ 中,且 } \|g_\varepsilon\|_{L^p(\Omega)}\leqslant C,$$

则 $g_\varepsilon\to g$ 在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛.

下面我们来证明定理1.

证明 在定理 1 的条件下,关系式(10)和式(11)意味着

$$\| E^H \|_{L^\infty(\mathbf{R}_+, H^1(\mathbf{R}))}, \quad \| HE^H_{xx} \|_{L^\infty(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R}))}, \quad \| \varphi^H_x \|_{L^\infty(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R}))},$$
$$\| n^H \|_{L^\infty(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R}))}, \quad \| Hn^H_x \|_{L^\infty(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R}))}$$

关于 H 都是一致有界的. 所以存在 (E^H, n^H, φ^H) 的子列(仍然用 H 标记) 有弱极限(E, n, φ). 即

$$E^H \to E \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, H^1(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}, \tag{12}$$
$$HE^H_{xx} \to f \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}, \tag{13}$$
$$n^H \to n \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}, \tag{14}$$
$$Hn^H_x \to g \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}, \tag{15}$$
$$\varphi^H_x \to \varphi_x \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}. \tag{16}$$

由于下面的映射是连续的:

$$H^1(\mathbf{R}) \to L^4(\mathbf{R}), \qquad u \mapsto u,$$
$$H^1(\mathbf{R}) \times L^2(\mathbf{R}) \to H^{-1}(\mathbf{R}), \qquad (u, v) \mapsto uv.$$

于是由式(12)和式(14)知

$$| E^H |^2 \to w \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, L^2(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}, \tag{17}$$
$$n^H E^H \to z \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, H^{-1}(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}. \tag{18}$$

同时由方程(6)和方程(7)可知

$$E^H_t \to E_t \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, H^{-2}(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}, \tag{19}$$
$$n^H_t \to n_t \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, H^{-1}(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}, \tag{20}$$
$$n^H_{tt} \to n_{tt} \text{ 在 } L^\infty(\mathbf{R}_+, H^{-3}(\mathbf{R})) \text{ 内弱}^* \text{ 收敛}. \tag{21}$$

首先,我们证明 $w = | E |^2$. 设 Ω 是 $\mathbf{R}$ 的有界子域. 注意到

$$\text{嵌入 } H^1(\Omega) \to L^4(\Omega) \text{ 是紧的}, \tag{22}$$

并且对任何 Banach 空间 X,

$$\text{嵌入 } L^\infty(\mathbf{R}_+, X) \to L^2(0, T; X) \text{ 是连续的}. \tag{23}$$

因此,根据式(12),式(19)和引理 1,设 $B_0 = H^1(\Omega)$, $B = L^4(\Omega)$, $B_1 = H^{-2}(\Omega)$,得到存在 $E^H|_\Omega$ 的子列(仍然用标记 H) 在 $L^2(0, T; L^4(\Omega))$ 内强收敛到 $E|_\Omega$. 所以我们假设

$$E^H \to E \text{ 在 } L^2(0, T; L^4_{\text{loc}}(\Omega)) \text{ 内强收敛}, \tag{24}$$

于是

$$E^H \to E \text{ 几乎处处在}[0, T] \times \mathbf{R} \text{ 内}, \tag{25}$$

从而,应用引理 2 和式(17)得到 $w = | E |^2$.

其次,我们证明 $z = nE$. 设 $\psi \in L^2(0, T; H^1(\mathbf{R}))$ 是测试函数, $\operatorname{supp}\psi \subset \Omega \subset \mathbf{R}$, 则

$$\int_0^T \int_{\mathbf{R}} (n^H E^H - nE)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega n^H (E^H - E)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega (n^H - n) E\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

一方面

$$\left| \int_0^T \int_\Omega n^H (E^H - E)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right| \leqslant$$
$$\| n^H \|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega))} \| E^H - E \|_{L^2(0, T; L^4(\Omega))} \| \psi \|_{L^2(0, T; L^4(\Omega))}.$$

因为 Ω 是有界的,我们从式(14)和式(24)得出

$$\int_0^T \int_\Omega n^H (E^H - E)\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0 \qquad (H \to 0).$$

另一方面,注意到 $E\psi \in L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))$. 事实上

$$\|E\psi\|_{L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}))} \leqslant \|E\|_{L^2(0,T;L^4(\mathbf{R}))}\|\psi\|_{L^2(0,T;L^4(\mathbf{R}))} < \infty .$$

于是从式(14)得

$$\int_0^T\int_\Omega (n^H - n)E\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0 \qquad (H\to 0).$$

因此,在 $L^2(0,T;H^{-1}(\mathbf{R}))$ 内有 $n^HE^H \to nE$. 所以 $z = nE$.

最后,设 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, 由式(6)和式(8)知

$$(\mathrm{i}E_t^H + E_{xx}^H - n^HE^H,\phi) = (H^2E_{xxxx}^H,\phi) = (H^2E_{xx}^H,\phi_{xx}),$$

$$(\varphi_t^H - n^H - |E^H|^2,\phi) = -(H^2n_{xx}^H,\phi) = (H^2n_x^H,\phi_x).$$

由于 $\|HE_{xx}^H\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+,L^2(\mathbf{R}))}$, $\|Hn_x^H\|_{L^\infty(\mathbf{R}_+,L^2(\mathbf{R}))}$ 关于 H 是一致有界的,我们得到

$$|(H^2E_{xx}^H,\phi_{xx})| = \left|\int_{\mathbf{R}} H^2E_{xx}^H\phi_{xx}\mathrm{d}x\right| \leqslant H\|HE_{xx}^H\|_{L^2}\|\phi_{xx}\|_{L^2} \to 0, \qquad H\to 0,$$

$$|(H^2n_x^H,\phi_x)| = \left|\int_{\mathbf{R}} H^2n_x^H\phi_x\mathrm{d}x\right| \leqslant H\|Hn_x^H\|_{L^2}\|\phi_x\|_{L^2} \to 0, \qquad H\to 0.$$

于是

$$\mathrm{i}E_t^H + E_{xx}^H - n^HE^H \to 0, \qquad 在\ \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}),L^\infty(\mathbf{R}_+))\ 中,$$

$$\varphi_t^H - n^H - |E^H|^2 \to 0, \qquad 在\ \mathcal{L}(\mathcal{D}(\mathbf{R}),L^\infty(\mathbf{R}_+))\ 中.$$

因此

$$\mathrm{i}E_t + E_{xx} - nE = 0,$$

$$\varphi_t - n - |E|^2 = 0.$$

定理 1 证毕.

2 一个强收敛结果

上节的结果促使我们考虑:如果提高初始数据的正则性,是否能得到更好的收敛性. 这一节我们将证明 $F^H = E^H - E$ 和 $u^H = n^H - n$ 在某种意义下强收敛. 通过计算 (E^H,n^H) 和 (E,n) 所满足的方程,得到 (F^H,u^H) 满足如下方程:

$$\mathrm{i}F_t^H + F_{xx}^H - H^2F_{xxxx}^H = u^HF^H + u^HE + nF^H + H^2E_{xxxx}, \tag{26}$$

$$u_{tt}^H - u_{xx}^H + H^2u_{xxxx}^H = |F^H|_{xx}^2 + [2\mathrm{Re}(F^H\bar{E})]_{xx} - H^2n_{xxxx}, \tag{27}$$

带初始条件

$$F^H|_{t=0} = 0,\ u^H|_{t=0} = 0,\ u_t^H|_{t=0} = 0. \tag{28}$$

我们引入函数 $V^H(x,t)$ 并将式(26)至式(28)变为

$$\mathrm{i}F_t^H + F_{xx}^H - H^2F_{xxxx}^H = u^HF^H + u^HE + nF^H + H^2E_{xxxx}, \tag{29}$$

$$u_t^H + V_{xx}^H = 0, \tag{30}$$

$$V_t^H + u^H - H^2u_{xx}^H + |F^H|^2 + 2\mathrm{Re}(F^H\bar{E}) - H^2n_{xx} = 0, \tag{31}$$

带初始条件

$$F^H|_{t=0} = 0,\ u^H|_{t=0} = 0,\ V^H|_{t=0} = 0. \tag{32}$$

我们知道,如果 $E_0(x) \in H^{m+4}(\mathbf{R})$, $n_0(x) \in H^{m+2}(\mathbf{R})$, $n_1(x) \in H^{m+2}(\mathbf{R})$, $m \geqslant 1$,则系统(3)至系统(5)存在惟一的整体解 (E^H,n^H) 满足

$$E^H(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{m+4}(\mathbf{R})),\ n^H(x,t) \in L^\infty(0,T;H^{m+2}(\mathbf{R})).$$

而且,如果 $E_0(x) \in H^{m+2}(\mathbf{R})$, $n_0(x) \in H^{m+1}(\mathbf{R})$, $n_1(x) \in H^m(\mathbf{R})$, $m \geqslant 1$,系统(1)、(2)及系

统(5)有惟一的整体解(E,n)满足[8]

$$E(x,t)\in L^{\infty}(0,T;H^{m+2}(\mathbf{R})),\ n(x,t)\in L^{\infty}(0,T;H^{m+1}(\mathbf{R})).$$

接下来我们通过证明引理 3 和引理 5 来完成定理 2 的证明.

引理 3 设定理 2 的条件成立,则存在函数 $M(t)\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_{+})$ 使得

$$\chi^2\leqslant M(t)(H^6+H^4),$$

其中

$$\chi^2=\|F^H\|_{L^2}^2+\|F_x^H\|_{L^2}^2+H^2\|F_{xx}^H\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|V_x^H\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|u^H\|_{L^2}^2+\frac{H^2}{2}\|u_x^H\|_{L^2}^2.$$

证明 将式(29)和 $-F_t^H$ 作内积得

$$(\mathrm{i}F_t^H+F_{xx}^H-H^2F_{xxxx}^H-u^HF^H-u^HE-nF^H-H^2E_{xxxx},\ -F_t^H)=0. \tag{33}$$

因为

$$\mathrm{Re}(\mathrm{i}F_t^H,\ -F_t^H)=0,$$

$$\mathrm{Re}(F_{xx}^H,\ -F_t^H)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|F_x^H\|_{L^2}^2,$$

$$\mathrm{Re}(-H^2F_{xxxx}^H,\ -F_t^H)=\frac{H^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|F_{xx}^H\|_{L^2}^2.$$

于是由式(33)知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|F_x^H\|_{L^2}^2+H^2\|F_{xx}^H\|_{L^2}^2\right]+\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}}(u^H+n)|F^H|_t^2\mathrm{d}x+\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}(u^HE+H^2E_{xxxx})\bar{F}_t^H\mathrm{d}x=0. \tag{34}$$

将式(31)和 $-V_{xx}^H$ 作内积得

$$(V_t^H+u^H-H^2u_{xx}^H+|F^H|^2+2\mathrm{Re}(F^H\bar{E})-H^2n_{xx},\ -V_{xx}^H)=0. \tag{35}$$

因为

$$(V_t^H,\ -V_{xx}^H)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|V_x^H\|_{L^2}^2,$$

$$(u^H,\ -V_{xx}^H)=(u^H,u_t^H)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u^H\|_{L^2}^2,$$

$$(-H^2u_{xx}^H,\ -V_{xx}^H)=(-H^2u_{xx}^H,\ -u_t^H)=\frac{H^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_x^H\|_{L^2}^2.$$

因此,由式(35)知

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\|V_x^H\|_{L^2}^2+\|u^H\|_{L^2}^2+H^2\|u_x^H\|_{L^2}^2\right]+\int_{\mathbf{R}}(|F^H|^2+2\mathrm{Re}(F^H\bar{E}))u_t^H\mathrm{d}x+H^2\int_{\mathbf{R}}n_{xx}V_{xx}^H\mathrm{d}x=0. \tag{36}$$

结合式(34)和式(36)可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\|F_x^H\|_{L^2}^2+H^2\|F_{xx}^H\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|V_x^H\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\|u^H\|_{L^2}^2+\frac{H^2}{2}\|u_x^H\|_{L^2}^2+\int_{\mathbf{R}}(|F^H|^2+2\mathrm{Re}(F^H\bar{E}))u^H\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}n|F^H|^2\mathrm{d}x\Big]=$$
$$2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}F^H\bar{E}_tu^H\mathrm{d}x+\int_{\mathbf{R}}n_t|F^H|^2\mathrm{d}x-2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}}H^2E_{xxxx}\bar{F}_t^H\mathrm{d}x-\int_{\mathbf{R}}H^2n_{xx}V_{xx}^H\mathrm{d}x. \tag{37}$$

设 $\phi^2 = \| F^H \|_{L^2}^2$ 且

$$\psi^2 = \| F_x^H \|_{L^2}^2 + H^2 \| F_{xx}^H \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| V_x^H \|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \| u^H \|_{L^2}^2 + \frac{H^2}{2} \| u_x^H \|_{L^2}^2 .$$

首先我们研究式(37)的右边.

$$\left| 2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}} F^H \bar{E}_t u^H \mathrm{d}x \right| \leqslant 2 \| E_t \|_{L^\infty} \| F^H \|_{L^2} \| u^H \|_{L^2} \leqslant M(t)(\phi^2 + \psi^2),$$

$$\left| \int_{\mathbf{R}} n_t |F^H|^2 \mathrm{d}x \right| \leqslant \| n_t \|_{L^\infty} \| F^H \|_{L^2}^2 \leqslant M(t)\phi^2,$$

$$\begin{aligned} &\left| 2\mathrm{Re}\int_{\mathbf{R}} H^2 E_{xxxx} \bar{F}_t^H \mathrm{d}x \right| \leqslant \\ &\quad 2H^2 [\| F^H \|_{L^2} \| E_{xxxxxx} \|_{L^2} + H^2 \| F_{xx}^H \|_{L^2} \| E_{xxxxxx} \|_{L^2} + \\ &\quad \| u^H \|_{L^2} \| F^H \|_{L^2} \| E_{xxxx} \|_{L^\infty} + \\ &\quad \| E \|_{L^\infty} \| u^H \|_{L^2} \| E_{xxxx} \|_{L^2} + \| n \|_{L^\infty} \| F^H \|_{L^2} \| E_{xxxx} \|_{L^2}] \leqslant \\ &\quad M(t) [\| F^H \|_{L^2}^2 + H^2 \| F_{xx}^H \|_{L^2}^2 + \| u^H \|_{L^2}^2 + H^4 + H^6] \leqslant \\ &\quad M(t)(\phi^2 + \psi^2 + H^4 + H^6), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{R}} H^2 n_{xx} V_{xx}^H \mathrm{d}x \right| = \\ &\quad \left| \int_{\mathbf{R}} H^2 n_{xxx} V_x^H \mathrm{d}x \right| \leqslant H^2 \| n_{xxx} \|_{L^2} \| V_x^H \|_{L^2} \leqslant M(t)(\psi^2 + H^4). \end{aligned}$$

因此,式(37)的右边小于

$$M(t)(\phi^2 + \psi^2 + H^4 + H^6).$$

下面我们研究式(37)的左边:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{R}} |F^H|^2 u^H \mathrm{d}x \right| \leqslant \| u^H \|_{L^2} \| F^H \|_{L^4}^2 \leqslant \\ &\quad C \| u^H \|_{L^2} \| F_x^H \|_{L^2}^{1/2} \| F^H \|_{L^2}^{3/2} \leqslant M(t)\phi^2 + \frac{1}{4}\psi^2, \end{aligned}$$

$$\left| \int_{\mathbf{R}} 2\mathrm{Re} F^H \bar{E} u^H \mathrm{d}x \right| \leqslant 2 \| E \|_{L^\infty} \| F^H \|_{L^2} \| u^H \|_{L^2} \leqslant M(t)\phi^2 + \frac{1}{4}\psi^2,$$

$$\left| \int_{\mathbf{R}} n |F^H|^2 \mathrm{d}x \right| \leqslant \| n \|_{L^\infty} \| F^H \|_{L^2}^2 \leqslant M(t)\phi^2.$$

注意到初始条件,我们从式(37)得到不等式

$$\psi^2 \leqslant M(t) \left[\phi^2 + \int_0^t (\phi^2 + \psi^2) \mathrm{d}\tau + H^4 + H^6 \right]. \tag{38}$$

将式(29)和 F^H 作内积得

$$(\mathrm{i}F_t^H + F_{xx}^H - H^2 F_{xxxx}^H - u^H F^H - u^H E - nF^H - H^2 E_{xxxx}, F^H) = 0. \tag{39}$$

因为

$$\mathrm{Im}(\mathrm{i}F_t^H, F^H) = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| F^H \|_{L^2}^2,$$

$$\mathrm{Im}(F_{xx}^H - H^2 F_{xxxx}^H - u^H F^H - nF^H, F^H) = 0.$$

于是由式(39)知

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \| F^H \|_{L^2}^2 = 2\mathrm{Im}(u^H E + H^2 E_{xxxx}, F^H) \leqslant \\ &\quad 2(\| E \|_{L^\infty} \| u^H \|_{L^2} + H^2 \| E_{xxxx} \|_{L^2}) \| F^H \|_{L^2} \leqslant \end{aligned}$$

$$M(t)(\phi^2+\psi^2+H^4). \tag{40}$$

由式(40)得到不等式

$$\phi^2 \leqslant M(t)\left[\int_0^t(\phi^2+\psi^2)\mathrm{d}\tau+H^4\right]. \tag{41}$$

设$\chi^2=\phi^2+\psi^2$.结合式(38)和式(41)可得估计

$$\chi^2 \leqslant M(t)\left(\int_0^t\chi^2\mathrm{d}\tau+H^4+H^6\right). \tag{42}$$

从而

$$\chi^2 \leqslant M(t)(H^4+H^6).$$

引理 4[9] 设下面出现的关于f,g的范数都是有意义的.则

$$\| D^k(fg)\|_{L^p} \leqslant C_k(\| D^k f\|_{L^r}\| g\|_{L^{r'}}+\| D^k g\|_{L^s}\| f\|_{L^{s'}}),$$

其中,$k\geqslant 2,1/p=1/r+1/r'=1/s+1/s',1\leqslant p\leqslant +\infty$,$C_k$是不依赖于$f$和$g$的常数.

引理 5 设定理 2 的条件均成立,则存在函数$M(t)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_+)$使得

$$\chi_m^2 \leqslant M(t)f(H) \qquad (m\geqslant 1), \tag{43}$$

其中

$$f(H)=o(H^2),\qquad 当 H\to 0,$$

$$\chi_m^2=\| D^m F^H\|_{L^2}^2+H^2\| D^{m+1}F^H\|_{L^2}^2+$$
$$\frac{1}{2}\| D^m V^H\|_{L^2}^2+\frac{1}{2}\| D^{m-1}u^H\|_{L^2}^2+\frac{H^2}{2}\| D^m u^H\|_{L^2}^2.$$

证明 假设当$m=k$时,估计式(43)成立,即

$$\chi_k^2 \leqslant M(t)f(H). \tag{44}$$

我们将证明当$m=k+1$时,估计式(43)也成立.

将式(31)和$(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}V^H$作内积得

$$(V_t^H+u^H-H^2u_{xx}^H+|F^H|^2+2\mathrm{Re}(F^H\bar{E})-H^2n_{xx},(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}V^H)=0. \tag{45}$$

因为

$$(V_t^H,(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}V^H)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| D^{k+1}V^H\|_{L^2}^2,$$

$$(u^H,(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}V^H)=(u^H,(-1)^k\Delta^k u_t^H)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| D^k u^H\|_{L^2}^2,$$

$$(-H^2u_{xx}^H,(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}V^H)=(-H^2u_{xx}^H,(-1)^k\Delta^k u_t^H)=\frac{H^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\| D^{k+1}u^H\|_{L^2}^2.$$

注意到引理 4 和式(44)得

$$|(|F^H|^2,(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}V^H)|=|(D^{k+1}|F^H|^2,D^{k+1}V^H)|\leqslant$$
$$C\| D^{k+1}F^H\|_{L^2}\| F^H\|_{L^\infty}\| D^{k+1}V^H\|_{L^2}\leqslant$$
$$M(t)(\| D^{k+1}V^H\|_{L^2}^2+f(H)),$$

$$|(2\mathrm{Re}(F^H\bar{E}),(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}V^H)|\leqslant 2|(D^{k+1}(F^H\bar{E}),D^{k+1}V^H)|\leqslant$$
$$C(\| D^{k+1}F^H\|_{L^2}\| E\|_{L^\infty}+\| F^H\|_{L^\infty}\| D^{k+1}E\|_{L^2})\| D^{k+1}V^H\|_{L^2}\leqslant$$
$$M(t)(\| D^{k+1}V^H\|_{L^2}^2+f(H)),$$

$$|(-H^2n_{xx},(-1)^{k+1}\Delta^{k+1}V^H)|=|(H^2D^{k+3}n,D^{k+1}V^H)|\leqslant$$
$$H^2\| D^{k+3}n\|_{L^2}\| D^{k+1}V^H\|_{L^2}\leqslant M(t)(\| D^{k+1}V^H\|_{L^2}^2+f(H)).$$

于是由式(45)知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|D^{k+1}V^H\|_{L^2}^2+\|D^k u^H\|_{L^2}^2+H^2\|D^{k+1}u^H\|_{L^2}^2]\leqslant M(t)(\|D^{k+1}V^H\|_{L^2}^2+f(H)). \tag{46}$$

由式(46)可得不等式

$$\|D^{k+1}V^H\|_{L^2}^2+\|D^k u^H\|_{L^2}^2+H^2\|D^{k+1}u^H\|_{L^2}^2\leqslant M(t)f(H). \tag{47}$$

将式(29)对 t 微分 1 次后与 $(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}F_t^H$ 作内积得

$$(\mathrm{i}F_{tt}^H+F_{xxt}^H-H^2F_{xxxxt}^H-(u^HF^H+u^HE+nF^H+H^2E_{xxxx})_t,(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}F_t^H)=0. \tag{48}$$

因为

$$\mathrm{Im}(\mathrm{i}F_{tt}^H,(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}F_t^H)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}^2,$$

$$\mathrm{Im}(F_{xxt}^H-H^2F_{xxxxt}^H,(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}F_t^H)=0,$$

注意到引理 4 和式(44)得

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Im}(-(u^HF^H)_t,(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}F_t^H)|\leqslant|(D^{k-1}(u^HF^H)_t,D^{k-1}F_t^H)|\leqslant\\&\quad C(\|D^{k-1}u_t^H\|_{L^2}\|F^H\|_{L^\infty}+\|u_t^H\|_{L^2}\|D^{k-1}F^H\|_{L^\infty}+\\&\quad\|D^{k-1}u^H\|_{L^\infty}\|F_t^H\|_{L^2}+\|u^H\|_{L^\infty}\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2})\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}\leqslant\\&\quad M(t)(\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}^2+f(H)),\\&|\mathrm{Im}(-(u^HE)_t,(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}F_t^H)|\leqslant|(D^{k-1}(u^HE)_t,D^{k-1}F_t^H)|\leqslant\\&\quad C(\|D^{k-1}u_t^H\|_{L^2}\|E\|_{L^\infty}+\|u_t^H\|_{L^2}\|D^{k-1}E\|_{L^\infty}+\\&\quad\|D^{k-1}u^H\|_{L^\infty}\|E_t\|_{L^2}+\|u^H\|_{L^\infty}\|D^{k-1}E_t\|_{L^2})\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}\leqslant\\&\quad M(t)(\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}^2+f(H)),\\&|\mathrm{Im}(-(nF^H)_t,(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}F_t^H)|\leqslant|(D^{k-1}(nF^H)_t,D^{k-1}F_t^H)|\leqslant\\&\quad C(\|D^{k-1}n_t\|_{L^2}\|F^H\|_{L^\infty}+\|n_t\|_{L^2}\|D^{k-1}F^H\|_{L^\infty}+\\&\quad\|D^{k-1}n\|_{L^\infty}\|F_t^H\|_{L^2}+\|n\|_{L^\infty}\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2})\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}\leqslant\\&\quad M(t)(\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}^2+f(H)),\\&|\mathrm{Im}(-H^2E_{xxxxt},(-1)^{k-1}\Delta^{k-1}F_t^H)|\leqslant H^2|(D^{k+3}E_t,D^{k-1}F_t^H)|\leqslant\\&\quad H^2\|D^{k+3}E_t\|_{L^2}\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}\leqslant M(t)(\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}^2+f(H)).\end{aligned}$$

于是由式(48)知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}^2\leqslant M(t)(\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}^2+f(H)). \tag{49}$$

由式(49)可得

$$\|D^{k-1}F_t^H\|_{L^2}^2\leqslant M(t)f(H). \tag{50}$$

将式(26)和 $(-1)^{k-1}\Delta^kF_t^H$ 作内积得

$$(\mathrm{i}F_t^H+F_{xx}^H-H^2F_{xxxx}^H-u^HF^H-u^HE-nF^H-H^2E_{xxxx},(-1)^{k-1}\Delta^kF_t^H)=0. \tag{51}$$

因为

$$\mathrm{Re}(\mathrm{i}F_t^H,(-1)^{k-1}\Delta^kF_t^H)=0,$$

$$\mathrm{Re}(F_{xx}^H,(-1)^{k-1}\Delta^kF_t^H)=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^{k+1}F^H\|_{L^2}^2,$$

$$\mathrm{Re}(-H^2F^H_{xxxx},(-1)^{k-1}\Delta^kF^H_t)=\frac{H^2}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|D^{k+2}F^H\|^2_{L^2},$$

注意到引理4 和式(44)得

$$\begin{aligned}&|\mathrm{Re}(-u^HF^H,(-1)^{k-1}\Delta^kF^H_t)|\leqslant|(D^{k+1}(u^HF^H),D^{k-1}F^H_t)|\leqslant\\&\quad C(\|D^{k+1}u^H\|_{L^2}\|F^H\|_{L^\infty}+\|u^H\|_{L^\infty}\|D^{k+1}F^H\|_{L^2})\|D^{k-1}F^H_t\|_{L^2}\leqslant\\&\quad M(t)f(H),\\&|\mathrm{Re}(-u^HE,(-1)^{k-1}\Delta^kF^H_t)|\leqslant|(D^{k+1}(u^HE),D^{k-1}F^H_t)|\leqslant\\&\quad C(\|D^{k+1}u^H\|_{L^2}\|E\|_{L^\infty}+\|u^H\|_{L^\infty}\|D^{k+1}E\|_{L^2})\|D^{k-1}F^H_t\|_{L^2}\leqslant\\&\quad M(t)f(H),\\&|\mathrm{Re}(-nF^H,(-1)^{k-1}\Delta^kF^H_t)|\leqslant|(D^{k+1}(nF^H),D^{k-1}F^H_t)|\leqslant\\&\quad C(\|D^{k+1}n\|_{L^2}\|F^H\|_{L^\infty}+\|n\|_{L^\infty}\|D^{k+1}F^H\|_{L^2})\|D^{k-1}F^H_t\|_{L^2}\leqslant\\&\quad M(t)f(H),\\&|\mathrm{Re}(-H^2E_{xxxx},(-1)^{k-1}\Delta^kF^H_t)|\leqslant H^2|(D^{k+5}E,D^{k-1}F^H_t)|\leqslant\\&\quad H^2\|D^{k+5}E\|_{L^2}\|D^{k-1}F^H_t\|_{L^2}\leqslant M(t)f(H).\end{aligned}$$

于是由式(51)知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\|D^{k+1}F^H\|^2_{L^2}+H^2\|D^{k+2}F^H\|^2_{L^2}]\leqslant M(t)f(H).\tag{52}$$

由式(52)可得

$$\|D^{k+1}F^H\|^2_{L^2}+H^2\|D^{k+2}F^H\|^2_{L^2}\leqslant M(t)f(H).\tag{53}$$

结合式(47)和式(53)得

$$\chi^2_{k+1}(t)\leqslant M(t)f(H).$$

引理5 证毕.从而完成了定理2 的证明.

致谢 本文得到怀化学院科研基金(HHUY2011-07)的资助,特此感谢.

参考文献(References):

[1] Zakharov V E. Collapse of Langmuir waves[J]. *Sov Phys JETP*, 1972, **35**: 908-914.

[2] Pecher H. An improved local well-posedness result for the one-dimensional Zakharov system [J]. *J Math Anal Appl*, 2008, **342**(2): 1440-1454.

[3] Guo B, Zhang J, Pu X. On the existence and uniqueness of smooth solution for a generalized Zakharov equation[J]. *J Math Anal Appl*, 2010, **365**(1): 238-253.

[4] Linares F, Matheus C. Well posedness for the 1D Zakharov-Rubenchik system[J]. *Advances in Differential Equations*, 2009, **14**(3/4): 261-288.

[5] Masmoudi N, Nakanishi K. Energy convergence for singular limits of Zakharov type systems [J]. *Invent Math*, 2008, **172**(3): 535-583.

[6] Garcia L G, Haas F, de Oliveira L P L, Goedert J. Modified Zakharov equations for plasmas with a quantum correction[J]. *Phys Plasmas*, 2005, **12**(1): 1-8.

[7] Lions J L. *Quelques Mèthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*[M]. Paris: Dunod Gauthier Villard, 1969:12, 53.

[8] Added H, Added S. Existence globale d'une solution reguliére des equations de la turbulence de Langmuir en dimension 2[J]. *C R A S*, *Paris*, 1984, **299**(12): 551-554.

[9] Added H S. Equations of Langmuir turbulence and nonlinear Schrödinger equation: smooth-

ness and approximation[J]. *J Functional Analysis*, 1988, **79**(1): 183-210.

Equations of Langmuir Turbulence and Zakharov Equations: Smoothness and Approximation

YOU Shu-jun[1,2], GUO Bo-ling[3], NING Xiao-qi[2]

(1. *School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha* 410083, *P. R. China*;

2. *Department of Mathematics, Huaihua University, Huaihua, Hunan* 418008, *P. R. China*;

3. *Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing* 100088, *P. R. China*)

Abstract: The authors considered a family of systems parameterized by H, which described Langmuir's turbulence, and studied the asymptotic behavior of the solutions (E^H, n^H) when H went to zero. They state convergence results of (E^H, n^H) to the couple (E, n) which is the solution of the Zakharov equations.

Key words: Zakharov equations; equations of Langmuir turbulence; approximation